

# Polynômes de Tchebychev

## Sommaire

---

|       |   |   |
|-------|---|---|
| I     | Polynômes de Tchebychev de première espèce . . . . .  | 1 |
| I-1)  | Premières propriétés . . . . .                        | 1 |
| I-2)  | Variations . . . . .                                  | 2 |
| II    | Polynômes de Tchebychev de seconde espèce . . . . .   | 4 |
| II-1) | Définition, propriétés . . . . .                      | 4 |
| II-2) | Relation avec les $T_n$ . . . . .                     | 4 |
| III   | Quelques mots sur les polynômes orthogonaux . . . . . | 5 |

---

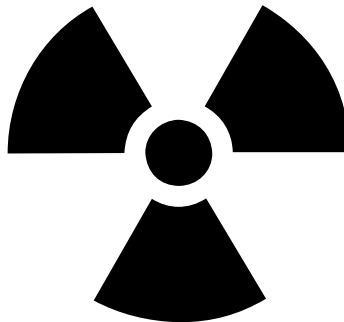


Figure 1.1: Vous avez dit Tchernobyl?

## I Polynômes de Tchebychev de première espèce

### I-1) Premières propriétés

**Proposition 1.** *Existence et unicité des polynômes de Tchebychev.*

*Soit  $n$  un entier naturel; il existe un polynôme  $P \in \mathbf{R}[X]$  tel que:*

$$\forall t \in \mathbf{R}, \cos nt = P(\cos t)$$

*Un tel polynôme  $P$  est unique et est noté  $T_n$ .*

**Preuve.** Pour l'existence, on procède par le calcul qui suit:

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbf{R}, e^{int} &= (\cos t + i \sin t)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos^k(t) i^{n-k} \sin^{n-k}(t) \end{aligned}$$

d'où, sachant que  $\cos nt = \Re(e^{int})$ :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \cos nt = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} \cos^{n-2k}(t) \times (-1)^k (1 - \cos^2 t)^k$$

ainsi, le polynôme  $P$  qui suit convient:

$$P = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} X^{n-2k} (X^2 - 1)^k$$

**Pour l'unicité**, il suffit de se rendre compte que deux polynômes qui conviendraient coïncideraient sur  $[-1; 1]$  qui est une partie infinie de  $\mathbf{R}$ . Ainsi, les deux polynômes seraient égaux. ■

**Proposition 2.** Relation de récurrence vérifiée par les polynômes de Tchebychev.

Soit  $n \in \mathbf{N}$ ; on a alors

$$\forall t \in \mathbf{R}, \cos nt + \cos(n+2)t = 2 \cos((n+1)t) \cos t$$

ce qui entraîne immédiatement la relation de récurrence vérifiée par  $(T_n)_{n \in \mathbf{N}}$ :

$$\forall n \in \mathbf{N}, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

On peut ainsi donner les **quelques premiers** polynômes de Tchebychev:  $T_0 = 1$ ,  $T_1 = X$ ,  $T_2 = 2X^2 - 1$ ,  $T_3 = 4X^3 - 3X$ .

On remarque que si  $n$  est impair,  $T_n(0) = 0$ ; sinon,  $T_n(0) = (-1)^{n/2}$ . Dans tous les cas,  $T_n(1) = 1$  (si  $t \equiv 0 \pmod{2\pi}$ , alors  $nt \equiv 0 \pmod{2\pi}$  aussi...).

Le **terme dominant** de  $T_n$  est:  $2^{n-1}X$  (s'obtient plus facilement avec la relation de récurrence qu'avec le développement explicite de la somme de la proposition 1!).

Pour ce qui est de la **parité**,  $T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$  (il est aisé de le vérifier sur  $[-1; 1]$ : quand deux cosinus sont-ils opposés?).

On a aussi  $T'_n(1) = n^2$  (obtenu en dérivant  $T_n(\cos t)$ ).

## I-2) Variations

**Exemple 1.** Le tracé de deux polynômes de Tchebychev, fait avec Python.

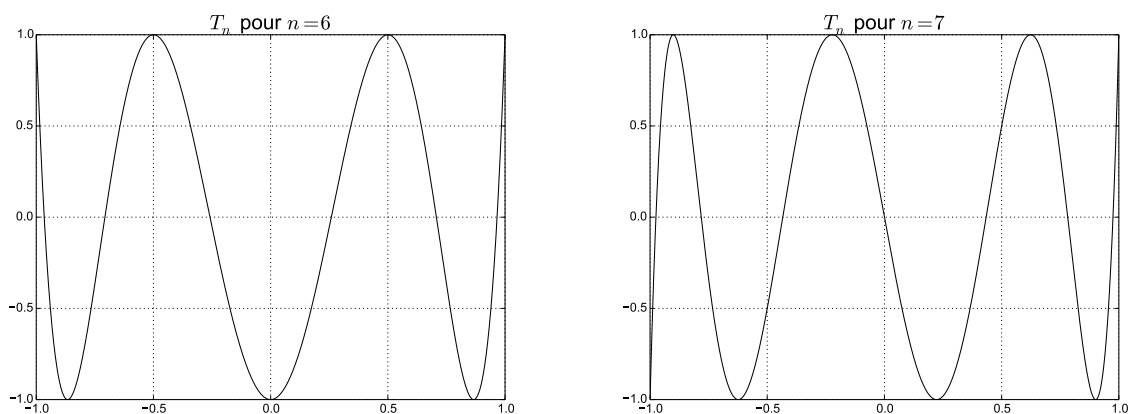


Figure 1.2:  $T_6$  et  $T_7$

Le code ayant permis de générer ça:

```

1  #!/usr/bin/env python2
2  # encoding: UTF-8
3  from operator import mul
4  from fractions import Fraction
5  import matplotlib.pyplot as libplot
6  import numpy as np
7
8  t = np.arange(-1.0, 1.0, 0.0001)
9
10 # Combinaison binômiale (existe peut être déjà en python...)
11 def nCk(n,k):
12     return int( reduce(mul, (Fraction(n-i, i+1) for i in range(k)), 1) )
13
14 # Polynôme de Tchebychev défini de manière explicite (pas de relation de récurrence)
15 def tchebychev(n, x):
16     return np.sum([ nCk(n, 2*k) * x ** (n - 2*k) * (x**2 - 1) ** k for k in range(0,(n/2)+1) ])
17
18 # Fonction de dessin
19 def drawTchebychev(n):
20     T = [tchebychev(n,i) for i in t]
21     libplot.plot(t,T, "-", color='black')
22     libplot.title('T_n pour n=' + str(n) + ', fontsize=20')
23     libplot.grid(True)
24     libplot.show()
25
26 # Les polynômes aux rangs 6, 7
27 drawTchebychev(6)
28 drawTchebychev(7)

```

Un petit exercice de topologie classique, pour introduire la topologie sur les polynômes (et ceux de Tchebychev en particulier):

**Exercice 1.** Soit  $E$  un EVN<sup>a</sup> de dimension finie, de corps de base  $\mathbf{K}$ ,  $F$  un fermé non vide de  $E$ . Soit également  $a \in E$ .

Alors il existe  $b \in F$  tel que  $\|a - b\| = d(a, F)$  (autrement dit, la distance est atteinte).

<sup>a</sup>espace vectoriel normé; on notera la norme introduite  $\| \cdot \|$ , et la distance associée  $d(x, y)$

**Preuve.** Soit  $b_0 \in F$ ,  $r = \|b_0 - a\|$ ,  $K = \overline{B}(a, r) \cap F$ .

$K$  est compact (l'intersection d'un compact et d'un fermé, reste fermée, et est bornée; or, un fermé borné dans un compact est compact). Ainsi, l'application  $\varphi : K \rightarrow \mathbf{K}, x \mapsto \|a - x\|$  atteint un minimum en un point  $b_1$  (non nécessairement unique!). Prenons un tel  $b_1$ : alors  $\forall x \in K, \|a - x\| \geq \|a - b_1\|$ .

De plus, pour tout  $x \in F \setminus K$ ,  $\|a - x\| \geq r = \|a - b_0\| \geq \|a - b_1\|$  car  $b_0 \in K$ .

Ainsi, pour tout  $x \in F$ ,  $\|a - x\| \geq \|a - b_1\|$ : on a trouvé le  $b$  recherché, c'est  $b_1$ . ■

**Proposition 3.** Soit  $n \in \mathbf{N}^*$ . Soit  $E = \mathbf{R}_n[X]$ ,  $F = \mathbf{R}_{n-1}[X]$  (fermé dans  $E$ , non vide).

Posons  $a = X^n$ , et posons la norme qui suit sur  $E$ :  $\|P\| = \sup_{x \in [-1;1]} |P(x)|$ .

Il existe  $P \in F$  tel que  $\|a - P\| = d(a, F)$  d'après l'exercice qui précède. Montrons-en davantage! Par exemple, que  $d(a, F) = \frac{1}{2^{n-1}}$ .

**Preuve.** Nous noterons  $T_n = 2^{n-1}(X^n - Q_n)$  avec  $Q_n \in \mathbf{R}_{n-1}[X] = F$  d'après les petites propriétés vues (cf. le coefficient dominant).

Soit  $Q \in F$ .

**Raisonnons par l'absurde:** supposons que  $\|X^n - Q\| \leq \|X^n - Q_n\|$  soit  $\|2^{n-1}(X^n - Q)\| \leq \|T_n\| = 1$  (en effet  $\sup_{[-1;1]} |T_n| = 1$ , voyez les graphes plus haut et la propriété fondamentale vérifiée sur  $[-1; 1]$  par les  $T_j$  pour tout  $j \dots$ ). Nommons  $P_n = 2^{n-1}(X^n - Q)$ .

On sait que l'on a  $P_n = 2^{n-1}X^n + A$ ,  $A \in F$ , puisque  $Q$  est de degré  $n - 1$  au plus. Ainsi, on a  $\deg(T_n - P_n) \leq n - 1$  (les  $2^{n-1}X^n$  se compensent; le reste, on ne sait pas vraiment, mais ça n'importe pas).

Sachant que  $\|P_n\| \leq 1$  (par hypothèse), on aura qu'aux  $n+1$  points  $x$  de  $[-1; 1]$  où  $|T_n(x)| = 1$ ,  $(T_n - P_n)(x)$  est du signe de  $T_n(x)$ .

Ceci entraîne que  $T_n - P_n$  a au moins  $n$  racines, ce qui est impossible car  $\deg(T_n - P_n) \leq n - 1$ . La contradiction souhaitée est établie! ■

## II Polynômes de Tchebychev de seconde espèce

### II-1) Définition, propriétés

On pose les polynômes de Tchebychev de seconde espèce de la manière suivante:

**Proposition 4.** *Les polynômes de Tchebychev de seconde espèce sont une famille de polynômes vérifiant la relation*

$$\forall t \in \mathbf{R}, U_n(\cos t) = \frac{\sin(n+1)t}{\sin t}$$

Ces polynômes, en plus d'exister et de faire l'objet d'un paragraphe ici, sont uniques.

**Preuve.** On démontre leur existence par récurrence à deux termes sur  $n$ .

Les polynômes  $U_0 = 1$ ,  $U_1 = 2X$  conviennent: pour tout  $t \in \mathbf{R} \setminus \pi\mathbf{Z}$ , pour  $n = 0$ ,  $\frac{\sin(n+1)t}{\sin t} = \frac{\sin t}{\sin t} = 1$ ;  
pour  $n = 1$ ,  $\frac{\sin(n+1)t}{\sin t} = \frac{2 \sin t \cos t}{\sin t} = 2 \cos t$ .

On va maintenant donner une relation de récurrence vérifiée par les  $U_n$ : soit  $n \in \mathbf{N}$ ; supposons que  $U_n$  et  $U_{n+1}$  sont définis. Alors:

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbf{R}, \quad U_{n+2}(\cos t) + U_n(\cos t) &= \frac{\sin(n+3)t + \sin(n+1)t}{\sin t} \\ &= \frac{2 \sin(n+2)t \cos t}{\sin t} \\ &= 2 \cos t \frac{\sin(n+2)t}{\sin t} \\ &= 2 \cos t U_{n+1}(\cos t) \end{aligned}$$

ce qui donne la relation:

$$\forall n \in \mathbf{N}, U_{n+2} = 2XU_{n+1} - U_n$$

Ainsi, par récurrence, on peut définir la suite  $(U_n)_{n \in \mathbf{N}}$  de polynômes de Tchebychev de seconde espèce, l'unicité de cette suite étant assurée par le fait que deux polynômes qui conviendraient seraient égaux sur  $] - 1; 1[$  qui est une partie infinie de  $\mathbf{R}$ . ■

### II-2) Relation avec les $T_n$

On a constaté que les  $U_n$  vérifient la même relation de récurrence que les  $T_n$ . Mais ils vérifient davantage: calculons à cet effet  $T'_n$ :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbf{N}^*, \forall t \in \mathbf{R}, \quad \sin t T'_n(\cos t) &= n \sin nt \\ \Leftrightarrow \frac{1}{n} T'_n(\cos t) &= \frac{\sin nt}{\sin t} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{n} T'_n &= U_{n-1} \end{aligned}$$

On aurait donc aussi pu définir les  $U_n$  de cette façon, au lieu de rechercher la relation de récurrence qu'ils vérifient.

Cette expression permet néanmoins de donner une formulation explicite des  $U_n$ :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbf{N}, U_n = \frac{1}{n+1} T'_{n+1} &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{\lfloor n+1/2 \rfloor} \binom{n+1}{2k} \left[ (n+1-2k) X^{n-2k} (X^2-1)^k + X^{n+1-2k} \times 2kX (X^2-1)^{k-1} \right] \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{\lfloor n+1/2 \rfloor} \binom{n+1}{2k} X^{n-2k} (X^2-1)^{k-1} \left[ (n+1-2k) (X^2-1) + X \times 2kX \right] \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{\lfloor n+1/2 \rfloor} \binom{n+1}{2k} X^{n-2k} (X^2-1)^{k-1} \left[ (n+1) X^2 - n - 1 + 2k \right] \end{aligned}$$

C'est une expression compliquée qui peut néanmoins être bien simplifiée.

### III Quelques mots sur les polynômes orthogonaux

Les polynômes de Tchebychev, quelle que soit l'espèce, constituent des familles de polynômes orthogonaux.

Un petit lemme préliminaire:

**Lemme 1.** Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien de dimension  $n$ , soit  $a \in E$ . Il existe une unique forme linéaire  $\varphi_a$  sur  $E$  telle que: pour tout  $x \in E$ ,  $\varphi_a(x) = \langle a|x \rangle$ .

$$i : E \rightarrow E^*$$

**Preuve.** Soit  $a \mapsto \left( \begin{array}{l} \varphi_a : E \rightarrow \mathbf{R} \\ x \mapsto \langle a|x \rangle \end{array} \right)$ .  $i$  est linéaire (se prouve sans mal); par ailleurs,  $i$  est injective car

$$\ker i = \{a \in E / \forall x \in E, \langle a|x \rangle = 0\} = \{0\}.$$

$E$  et  $E^*$  sont tous deux de dimension  $n$ , donc  $i$  est bijective. ■

**Définition 1.** Produit scalaire pour des polynômes orthogonaux.

On pose le produit scalaire qui suit sur  $E = \mathbf{R}[X]$  (qui s'applique aussi aux fonctions continues de carré intégrable): soient  $w \in \mathcal{C}^0(I, \mathbf{R}^+)$  une fonction non nulle,  $I = [-1; 1]$ , pour donner le produit scalaire  $\langle f|g \rangle = \int_I fgw$ .

**Remarque 1.** C'est bien un produit scalaire<sup>1</sup>:

- il est symétrique (sans problème,  $\int_I fgw = \int_I gfw$ )
- il est défini positif: si  $f \neq 0$ ,  $\langle f|f \rangle = \int_I f^2w > 0$  cf. cours sur l'intégration.
- il est bilinéaire: la malice d'avoir prouvé d'abord la symétrie fait que l'on n'a qu'un seul côté à vérifier. Si  $g$  est fixé,  $f, h \in E$ ,  $\lambda \in \mathbf{R}$ ,  $\int_{-1}^1 (\lambda f + h)gw = \int_{-1}^1 \lambda fgw + \int_{-1}^1 hgw = \lambda \int_{-1}^1 fgw + \int_{-1}^1 hgw$ .

**Remarque 2.** On peut construire, par récurrence sur  $k$ , une base orthonormée de  $E_k = \mathbf{R}_k[X]$  à base de polynômes orthogonaux:  $w$  est fixé.

Sachant que  $E_{k-1}$  est un hyperplan de  $E_k$ , on pose  $D_k$  tel que  $E_k = D_k \oplus E_{k-1}$ . On a  $X^k \in D_k$ ; on peut alors dire que  $D_k = \text{vect}(X^k)$ . On pose alors  $P_k : \begin{cases} P_k \text{ de degré } k \\ \|P_k\| = 1 \text{ et } \langle P_k|X^k \rangle = 1 \end{cases}$ . Un tel  $P_k$  existe et est unique (cf. lemme qui précède, on utilise la bijection réciproque). C'est, en quelques sortes, une forme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt...

$P_k$  est de degré  $k$  (la famille  $(P_j)_{j \in \mathbf{N}}$  est à degrés échelonnés donc libre...); le coefficient dominant de  $P_k$  est  $\frac{1}{\langle P_k|X^k \rangle}$ . Le lecteur aura soin de vérifier que si  $a \neq b$ ,  $\langle P_a|P_b \rangle = 0$ , et que par conséquent, pour tout  $P \in \mathbf{R}_{k-1}[X]$ ,  $\langle P_k|P \rangle = 0$ .

<sup>1</sup>forme bilinéaire symétrique définie positive

**Question:** pourquoi n'avoir pas choisi la famille  $(X^k)_{k \in \mathbf{N}}$  quel que soit  $w$ ? La réponse est simple: celle-ci n'est pas orthonormée (ni même orthogonale) pour tout  $w \in \mathcal{C}^0(I, \mathbf{R}^+)$ . On calcule facilement que si  $w = 1$ ,  $\langle X^p | X^q \rangle = \int_{-1}^1 x^{p+q} dx = \frac{1 - (-1)^{p+q+1}}{p+q+1}$ , non nul si  $p+q$  est pair.

**Proposition 5.** *Application aux polynômes de Tchebychev.*

Les polynômes de Tchebychev de seconde espèce sont une famille de polynômes orthogonaux avec  $w : t \mapsto \sqrt{1-t^2}$  et  $I = [-1; 1]$ .

Ceux de première espèce le sont pour  $I = [-1; 1]$  et  $w : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$  (on prendra soin de bien justifier que ça fonctionne, puisque  $w$  n'est pas définie en 1 et -1...).

**Preuve.** Pour la seconde espèce:

Si  $p, q \in \mathbf{N}$ , alors  $\langle U_p | U_q \rangle = \int_{-1}^1 U_p(t) U_q(t) \sqrt{1-t^2} dt$ . Il est naturel de faire le changement de variable:  $t = \cos u$ , pour pouvoir exprimer facilement  $U_p, U_q$  et se débarrasser de la racine (faire d'une pierre trois coups!). Cela donne:

$$\begin{aligned} \langle U_p | U_q \rangle &= \int_{-\pi}^0 U_p(\cos u) U_q(\cos u) \times -|\sin u| \sin u du \\ &= - \int_{-\pi}^0 \frac{\sin[(p+1)u] \sin[(q+1)u]}{\sin^2 u} \sin^2 u du \\ &= - \int_{-\pi}^0 \sin[(p+1)u] \sin[(q+1)u] du \\ &= - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^0 (\cos[(p+q+2)u] - \cos[(p-q)u]) du \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq q \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } p = q \end{cases} \end{aligned}$$

On vient de prouver l'orthogonalité, mais on remarque au passage que la famille des polynômes de Tchebychev de seconde espèce n'est pas de norme 1...

Pour la première espèce: on effectue le même changement de variable, ce qui donne:

$$\begin{aligned} \langle T_p | T_q \rangle &= - \int_{-\pi}^0 T_p(\cos u) T_q(\cos u) \frac{\sin u}{\sin u} du \\ &= - \int_{-\pi}^0 \cos pu \cos qu du \\ &= - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^0 (\cos(p+q)u + \cos(p-q)u) du \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq q \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } p = q \end{cases} \end{aligned}$$

■