Espaces probabilisés

Sommaire

I Tribus, espaces probabilisables

I-1) Tribus

Définition 1. Soit Ω un ensemble non vide, $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\Omega)$; on dit que $\mathcal{T}$ est une **tribu** sur Ω lorsque:

1. $\varnothing \in \mathcal{T}$
2. $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \left(A \in \mathcal{T} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{T}\right)$
3. si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ alors $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$.

Définition 2. Si $\mathcal{T}$ est une tribu sur Ω, on appelle $(\Omega, \mathcal{T})$ un **espace probabilisable**, dont Ω est **l'univers**. Les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelés **événements**.

> **Exemple 1.** $\mathcal{P}(\Omega)$, $\{\varnothing, \Omega\}$, $\left\{\varnothing, \Omega, A, \overline{A}\right\}$ sont des tribus.

I-2) Propriétés des tribus

Proposition 1. *Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable. On a les propriétés qui suivent:*

- $\Omega \in \mathcal{T}$ *en vertu des propriétés 1 et 2 de la définition 1*

- *Si* $(A_n)_n \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ *alors* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$.

  Preuve. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}}$*; par 2:* $\forall n \in \mathbb{N}, \overline{A_n} \in \mathcal{T}$*; par 3:* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} \in \mathcal{T}$*; par 2:* $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}} \in \mathcal{T}$. ■

- $\mathcal{T}$ *est stable par union, intersection finies.*

  Preuve. *Si* $A_1, ..., A_p \in \mathcal{T}$ *alors: pour l'union, on considère pour* $n \geqslant p$, $A_n = \varnothing \in \mathcal{T}$ *et* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{k=0}^{p} A_k \in \mathcal{T}$ *par 3.*

  Pour l'intersection, on considère pour $n \geqslant p$, $A_n = \Omega \in \mathcal{T}$ *et* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap_{k=0}^{p} A_k \in \mathcal{T}$ *par 3.* ■

- *Si* $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ *est une famille de tribus sur* Ω, *alors* $\mathcal{T} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i$ *est aussi une tribu sur* Ω.

  Preuve. *On vérifie les 3 axiomes:*

  ▷ $\forall i \in I, \varnothing \in \mathcal{T}_i$ *donc* $\varnothing \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i$,

  ▷ *Soit* $A \in \mathcal{T}$*; ainsi* $\forall i \in I, A \in \mathcal{T}_i$ *donc* $\overline{A} \in \mathcal{T}_i$, *donc* $\overline{A} \in \mathcal{T}$,

  ▷ *Si* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$, *alors:* $\forall i \in I, (A_n)_n \in \mathcal{T}_i^{\mathbb{N}}$ *donc* $\forall i \in I, \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}_i$ *donc* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$.

  ■

Exercice 1. Tribu engendrée par une partie.
Soit $P \subset \mathcal{P}(\Omega)$, $P \neq \varnothing$. Il existe une plus petite tribu, au sens de l'inclusion, contenant P; c'est l'intersection de toutes les tribus sur Ω contenant P.

Preuve. Soit $\mathcal{E} = \{\Theta/\Theta \text{ est une tribu contenant } P\}$. On a $\mathcal{E} \neq \varnothing$ car $\mathcal{P}(\Omega) \in \mathcal{E}$.

Soit $\mathcal{T} = \bigcap_{\Theta\in\mathcal{E}} \Theta$. On a: $\forall \Theta \in \mathcal{E}, P \subset \Theta$ donc $P \subset \mathcal{T}$; $\forall \Theta \in \mathcal{E}, \mathcal{T} \subset \Theta$ donc $\mathcal{T}$ convient.

Il y a unicité du $\mathcal{T}$: si $\mathcal{T}'$ convient, alors $\forall \Theta \in \mathcal{E}, \mathcal{T}' \subset \Theta$ donc $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$, or $\mathcal{T}' \in \mathcal{E}$ donc $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$.

Ainsi, $\mathcal{T}$ est la tribu engendrée par P. ■

> **Exemple 2.** Sur $\mathbb{R}$, $P = \{\text{Unions quelconques d'intervalles ouverts}\}$.
>
> Ici, la tribu engendrée par P est la tribu des boréliens, à partir de laquelle on définit l'intégrale de Lebesgue.

Remarque 1. Au sujet d'une famille auto-indexée: si $X \neq \varnothing$, alors la famille auto-indexée sur X est l'identité $\mathrm{id}_{X\to X}$, que l'on pourrait noter $(x_x)_{x\in X}$ et que l'on note $(x)_{x\in X}$.

Au sujet des plus petits/grands éléments d'un ensemble pour une certaine relation d'ordre: lorsqu'ils existent, ils sont uniques (on le prouve en utilisant la propriété d'antisymétrie des relations d'ordre).

Proposition 2. *Si* Ω *est un univers,* $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ *tels que* $B \in \{A, \overline{A}\}$, $P = \{A, B\}$, *alors*

$$\mathcal{T} = \left\{ \begin{array}{c} \varnothing, \Omega, A, \overline{A}, B, \overline{B}, A\cup B, A\cup\overline{B}, \overline{A}\cup B, \overline{A}\cup\overline{B}, \overline{A}\cap\overline{B}, \\ \overline{A}\cap B, A\cap\overline{B}, A\cap B, (\overline{A}\cap\overline{B})\cup(A\cap\overline{B}), (\overline{A}\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B) \end{array} \right\}$$

Un dessin permet d'illustrer cette proposition...

Exercice 2. Soit $f : E \to F$, $\mathcal{T}$ une tribu sur E.
Montrer que $f\langle\mathcal{T}\rangle$ n'est pas nécessairement une tribu sur F, puis que $\mathcal{T}' = \{A \in \mathcal{P}(F) / f^{-1}\langle A\rangle \in \mathcal{T}\}$ est une tribu sur F, et enfin que si T est une tribu sur F, alors $\mathcal{T} = \{f^{-1}\langle A\rangle, A \in T\}$ est une tribu sur E.

Preuve. Pour le premier point, prenons un contre-exemple: si $E=\{1,2,3,4\}$, $F=\{0,1,2\}$, $\mathcal{T}=\{\varnothing,E,\{1,2\},\{3,4\}\}$ et $f:\begin{cases}1\mapsto 0\\ 2,3\mapsto 1\\ 4\mapsto 2\end{cases}$, alors $f\langle\mathcal{T}\rangle=\{\varnothing,\{0,1\},\{1,2\},F\}$ or $\{1\}=\{1,2\}\cap\{0,1\}\notin\mathcal{T}$.

Pour le second point, on vérifie les 3 axiomes:

- $f^{-1}\langle\varnothing\rangle=\varnothing$,
- soit $A\in\mathcal{T}'$, alors $f^{-1}\langle A\rangle\in\mathcal{T}$ et: $E\backslash f^{-1}\langle A\rangle=\{x\in E/f(x)\notin A\}=\left\{x\in E/f(x)\in\overline{A}\right\}=f^{-1}\left\langle\overline{A}\right\rangle$ donc $f^{-1}\left\langle\overline{A}\right\rangle\in\mathcal{T}'$.
- soit $(A_n)_n\in\mathcal{T}'^{\mathbb{N}}$; alors $f^{-1}\left\langle\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}A_n\right\rangle=\left\{x\in E/f(x)\in\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}A_n\right\}=\{x\in E/\exists n\in\mathbb{N}/f(x)\in A_n\}=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}f^{-1}\langle A_n\rangle\in\mathcal{T}'$.

Pour le troisième point, faisons de même:

- $\varnothing=f^{-1}\langle\varnothing\rangle$ et $\varnothing\in T$ donc $\varnothing\in\mathcal{T}$,
- Soit $B\in\mathcal{T}$; alors $\exists A\in T/B=f^{-1}\langle A\rangle$, prenons un tel A et $\overline{B}=E\backslash f^{-1}\langle A\rangle$, or $\overline{A}\in T$ donc $\overline{B}\in\mathcal{T}$.
- Soit $(B_n)_n\in\mathcal{T}^{\mathbb{N}}$; on a $\forall n\in\mathbb{N},B_n=f^{-1}\langle A_n\rangle$ où $A_n\in T$; prenons une telle suite (A_n). Alors $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}B_n=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}f^{-1}\langle A_n\rangle=f^{-1}\left\langle\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}A_n\right\rangle\in\mathcal{T}$.

■

I-3) Systèmes complets d'événements

Définition 3. Soient I un ensemble non vide, fini ou dénombrable[1], $(\Omega,\mathcal{T})$ un espace probabilisable et $(A_i)_{i\in I}\in\mathcal{T}^I$.

On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est un système complet d'événements lorsque $\forall i,j\in\mathbb{N},(i\neq j\Rightarrow A_i\cap A_j=\varnothing)$ et $\bigcup\limits_{i\in I}A_i=\Omega$.

On peut être amené (pas obligatoirement !!) à considérer une partition lorsque $\forall i,A_i\neq\varnothing$.

Exercice 3. *Une histoire de vocabulaire.*

Si $(\Omega,\mathcal{T})$ est un espace probabilisable, $(A_n)_n\in\mathcal{T}^{\mathbb{N}}$, $B=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcap\limits_{k\geqslant n}A_k\right)=\liminf\limits_n A_n=\underline{\lim}_n A_n$ et $C=\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcup\limits_{k\geqslant n}A_k\right)=\limsup\limits_n A_n=\overline{\lim}_n A_n$: qui sont B et C en phrases "courantes"?

Réponse. Soit $\omega\in\Omega$; $\omega\in B\Leftrightarrow$ "ω est dans tous les A_n à partir d'un certain rang n_0"; $\omega\in C\Leftrightarrow$ "ω est dans une infinité de A_n".

II Espaces probabilisés

II-1) Quelques définitions et remarques

Définition 4. Soit $(\Omega,\mathcal{T})$ un espace probabilisable; une probabilité $\mathbb{P}$ est une application $\mathbb{P}:\mathcal{T}\to[0;1]$ telle que:

[1] on dira aussi "au plus dénombrable" cf. le cours précédent

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- si $(A_n)_n \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ avec les A_n 2 à 2 incompatibles[2], alors $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$. (cette propriété s'appelle σ-additivité)

On appelle $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un **espace probabilisé**.

Remarque 2. Quelques notes:

- Dans la définition, il est sous-entendu que la famille $(\mathbb{P}(A_n))$ est sommable; en particulier $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$. Attention, cette sommabilité n'est vraie que lorsque les A_n sont 2 à 2 incompatibles (on verra plus loin dans le cours des exercices où la famille n'a rien de sommable).
- Si on prend les A_n tous vides, alors $\mathbb{P}(\varnothing) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\varnothing)$ or la famille que l'on somme est positive, visiblement constante donc $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$ (seule constante sommable).
- La σ-additivité entraîne l'additivité "simple":

  Preuve. Si A, B sont tels que $A \cap B = \varnothing$, $A_0 = A$, $A_1 = B$ et $\forall n \geqslant 2, A_n = \varnothing$, alors:

  $$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) & = & \mathbb{P}(A \cup B) \\ \| & & \| \\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) & & \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B) \end{array}$$

  ■

- Si Ω est fini, on peut remplacer la σ-additivité par l'additivité; en effet, si les A_n sont 2 à 2 disjoints, il n'y a qu'un nombre fini de A_n non vides; comme $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$, on conclut avec l'additivité.

Définition 5. Un événement $A \in \mathcal{T}$ est dit "presque sûr" lorsque sa probabilité est 1; il est "négligeable" lorsque sa probabilité est 0.

Une propriété Q est dite "presque sûre" lorsque $\mathbb{P}(\{Q \text{ vraie}\}) = 1$ (idem avec la négligeabilité).

Proposition 3. *Quelques propriétés des probabilités.*

- $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$
- *Si $A, B \in \mathcal{T}$, alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$:*

  Preuve. *$A = (A \cap B) \sqcup A'$ où $A' = A \cap \overline{B} \in \mathcal{T}$; $B = (A \cap B) \sqcup B'$ où $B' = B \cap \overline{A} \in \mathcal{T}$. Alors $A \cap B$, A', B' sont des éléments de $\mathcal{T}$ 2 à 2 incompatibles, ce qui nous permet d'écrire:*

  $$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}\left(A'\right) \\ \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}\left(B'\right) \end{aligned}$$

  et $A \cup B = (A \cap B) \sqcup A' \sqcup B'$ d'où (en additionnant les 2 formules trouvées) le résultat. ■

- *Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.*

  Preuve. *$B = A \cup (B \cap \overline{A})$.* ■

- *Si A est négligeable, B est un événement alors $A \cap B$ est négligeable.*

[2] $\forall i, j \in \mathbb{N}, (i \neq j \Rightarrow A_j \cap A_j = \varnothing)$

- *Si A est presque sûr, B est un événement alors $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)$.*

  Preuve. *$\overline{A}$ négligeable donc $\mathbb{P}\left(\overline{A} \cap B\right) = 0$ et $B = (A \cap B) \sqcup \left(\overline{A} \cap B\right)$ donc $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + 0$.* ■

- *Petite chose hors programme mais qui risque de tomber en tant que définition aux concours: $(A_n)_n \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ est un système **quasi-complet** lorsque:*

  ▷ $\forall i, j \in \mathbb{N}, (i \neq j \Rightarrow \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = 0)$

  ▷ $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *est presque sûr*

II-2) Propriétés de continuité croissante, décroissante et conséquences

Théorème 1. Propriété de continuité croissante.
Soit $(A_n) \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ croissante au sens de l'inclusion (i.e. $A_0 \subset A_1 \subset ... \subset A_n \subset A_{n+1}$ pour tout n). Alors:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_n \mathbb{P}(A_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$$

Preuve. Soit: $B_0 = A_0$ et $\forall n \geqslant 1, B_n = A_n \cap \overline{A_{n-1}}$ (i.e. les B_n sont la différence entre A_n et A_{n-1}).

On a: $\forall n \in \mathbb{N}, B_n \in \mathcal{T}$; par construction, les B_n seront 2 à 2 incompatibles et $\forall n \in \mathbb{N}, \bigcup\limits_{k=0}^{n} B_k = \bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k = A_n$.

Ainsi, $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

De plus, $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(B_n)$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=0}^{n} B_k\right) \underset{B_j \text{disjoints}}{=} \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(B_k)$.

Lorsque $n \to \infty$, $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}(B_k) \longrightarrow \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(B_k)$, donc $\boxed{\lim\limits_n \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)}$.

Pour le sup, il suffit de se rendre compte que la suite des $(\mathbb{P}(A_n))_n$ est croissante et majorée, donc tend vers son sup. ■

Théorème 2. Propriété de continuité décroissante.
Soit $(A_n) \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ décroissante au sens de l'inclusion (i.e. $A_0 \supset A_1 \supset ... \supset A_n \supset A_{n+1}$ pour tout n). Alors:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_n \mathbb{P}(A_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$$

Preuve. On a $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \overline{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}}$, donc: comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{A_n} \in \mathcal{T}$, et $\overline{A_n} \subset \overline{A_{n+1}}$, on applique la propriété de continuité croissante à ces complémentaires et il vient: $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}\right) = \lim\limits_n \mathbb{P}\left(\overline{A_n}\right)$; ainsi,

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_n \mathbb{P}(A_n)}$$

Pour l'inf, il suffit de se rendre compte que la suite des $(\mathbb{P}(A_n))_n$ est décroissante et minorée, donc tend vers son inf. ■

Proposition 4. *Des conséquences.*

Si $(A_n) \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ est une suite d'événements tels que $(i \neq j \Rightarrow \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = 0)$, alors $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$.

Preuve. Par récurrence sur $N \in \mathbb{N}$: soit $Q(N)$ la propriété "si $A_0, ..., A_n$ sont tels que $(i \neq j \Rightarrow \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = 0)$ alors $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(A_k)$".

- $Q(1)$ est vraie (voie la formule du point 2 de la proposition 3)
- Soit $N \in \mathbb{N}, N \geqslant 1$, $A_0, ..., A_{N+1}$ tels que $(i \neq j \Rightarrow \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = 0)$.

  Alors $A_0, ..., A_N$ vérifient la propriété $Q(N)$; soit $B = \bigcup_{k=0}^{N} A_k$; B et A_{N+1} vérifient $\mathbb{P}(B \cap A_{N+1}) = 0$ car $A_0 \cap A_{N+1}, ..., A_N \cap A_{N+1}$ vérifient la propriété au rang 2.

  Maintenant, si $i \neq j$, $\mathbb{P}((A_i \cap A_{N+1}) \cap (A_j \cap A_{N+1})) = 0$ car $A_i \cap A_j \cap A_{N+1} \subset A_i \cap A_j$. Donc $\mathbb{P}(B \cap A_{N+1}) \underset{\text{H.R.}}{=} 0 = \sum_{i=0}^{N} \mathbb{P}(A_i \cap A_{N+1})$, et $\mathbb{P}(B \cup A_{N+1}) \underset{\text{rang } 2}{=} \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A_{N+1})$.

  Avec l'hypothèse de récurrence, il vient que $\mathbb{P}(B \cup A_{N+1}) = \sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}(A_k) + \mathbb{P}(A_{N+1})$.

  Avec cette récurrence, soit $B_N = \bigcup_{k=0}^{N} A_k$; on a $\bigcup_{N \in \mathbb{N}} B_N = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} A_n$ et $\forall N \in \mathbb{N}, B_N \subset B_{N+1}$; on applique la propriété de continuité croissante sur la suite des B_N, il vient que:

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)} = \lim_{n} \mathbb{P}(B_N) = \lim_{N} \sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}(A_k) \boxed{\underset{\text{famille positive}}{=} \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_k)}$$

■

Théorème 3. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un système complet[a] d'événements, soit $B \in \mathcal{T}$.
On a:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(B \cap A_n)$$

[a]et non une suite croissante, pour l'abréviation s.c.

Preuve. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \Omega$; $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{(B \cap A_n)}_{2 \text{ à } 2 \text{ incompatibles}} = B \cap \Omega = B$. On n'a alors qu'à appliquer ce que l'on vient de voir. ■

Exercice 4. Démontrer la même chose pour un système quasi-complet.

Preuve. Pour un tel système, on aura $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$; $\mathbb{P}(A) = 1$ donc $\mathbb{P}(\overline{A}) = 0$, donc $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B)$.

Si $B_n = A_n \cap B$ alors si $i \neq j$, $\mathbb{P}(B_i \cap B_j) = 0$, donc $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(B_n)$ or $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \mathbb{P}(A \cap B)$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(B_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n \cap B)$, d'où le résultat. ■

Proposition 5. *Sous-additivité: si* $(A_n)_n \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ *alors* $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leqslant \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$.

Remarque 3. On n'a dit nulle part que la famille des $\mathbb{P}(A_n)$ était ici sommable... Si elle ne l'est pas, l'inégalité est immédiate (la somme tendant vers $+\infty$ en tant que somme d'une famille positive).

Preuve. Par récurrence, à nouveau: soit $Q(n)$ la propriété "$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(A_k)$".

- Pour $Q(2)$, c'est tout vu.

- Soit $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$. Si $Q(n)$ est vérifiée, alors soit $B = \bigcup_{k=0}^{n} A_k$; ainsi $\bigcup_{k=0}^{n+1} A_k = B \cup A_{n+1}$.

  On peut donc écrire que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n+1} A_k\right) & \underset{Q(2)}{\leqslant} \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A_{n+1}) \\ & \underset{Q(n)}{\leqslant} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(A_k) + P(A_{n+1}) \\ & \leqslant \sum_{k=0}^{n+1} \mathbb{P}(A_k) \end{aligned}$$

  Maintenant, si $B_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_k$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante, d'union $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, donc $\mathbb{P}(B_n) \longrightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$ par continuité coirssante. Or, $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(B_n) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(A_k)$.

  Lorsque $n \to \infty$, $\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) \underset{\text{famille positive}}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)}$.

■

II-3) Un germe de probabilité...

Théorème 4. Soit Ω un univers fini ou dénombrable; on considère $(p_\omega)_{\omega\in\Omega} \in (\mathbb{R}^+)^\Omega$ telle que $\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega = 1$.
On prend $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$.
Il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω telle que $\forall \omega \in \Omega, \mathbb{P}(\omega) = p_\omega$.

Preuve. Par analyse-synthèse.

- Si $\mathbb{P}$ existe, alors:

  Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$; alors $A = \bigcup_{\omega\in A} \{\omega\}$; de plus, $(p_\omega)_{\omega\in A} \in (\mathbb{R}^+)^A$ est sommable en tant que sous-famille d'une famille sommable.

  Les ω étant 2 à 2 incompatibles, il vient:

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega\in A} p_\omega \Longrightarrow \text{Unicité de } \mathbb{P}} \tag{1.1}$$

- Reste à montrer que ceci définit bien une probabilité sur Ω; on vérifie alors les axiomes:

  - ▷ (1) définit une application de $\mathcal{T}$ dans $[0;1]$: Si $A \in \mathcal{T}$ alors $(p_\omega)_{\omega\in A}$ est sommable, donc $\mathbb{P}(A)$ existe et pour tout ω, $p_\omega \geqslant 0$. Ainsi, $\mathbb{P}(A) \geqslant 0$ et $\sum_{\omega\in A} p_\omega \leqslant \sum_{\omega\in\Omega} p_\omega = 1$, donc $\mathbb{P}(A) \leqslant 1$.
  - ▷ $\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{\omega\in\Omega} p_\omega = 1$
  - ▷ σ-additivité: Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{P}(\Omega))^{\mathbb{N}}$ est telle que les A_n sont deux à deux incompatibles, alors

$$A=\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}}A_n \text{ d'où: } \mathbb{P}(A)\underset{\text{par def. de }\mathbb{P}}{=}\sum_{\omega\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n}p_\omega\underset{\substack{\text{th. de som / paquets}\\ \text{ici sert } A=\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}}A_n}}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{\omega\in A_n}p_\omega\right),\text{ soit}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(A_n)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(A_n)}$$

▷ Enfin, en bonus, on notera que $\mathbb{P}(\{\omega\})=\sum_{\Theta\in\{\omega\}}p_\Theta=p_\omega$.

■

Exemple 3. La matapof[a].

On lance la "matapof" ou une pièce, jusqu'à tomber sur "face". Alors l'univers est $\Omega=\{(1),(0,1),(0,0,1),...,\infty\}$ (∞ désigne la suite nulle, où l'on n'a jamais "face").

- $\mathbb{P}\left(\left(\underbrace{0,...,0,1}_{k}\right)\right)=\dfrac{1}{2^k}$
- $\mathbb{P}(\infty)=1-\mathbb{P}(\Omega\backslash\{\infty\})=1-\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^k}=0.$

[a] Machine à tirer à pile ou face de Roland Moreno, l'inventeur de la carte à puce

Remarque 4. Si Ω est dénombrable, alors on substituera $(\omega)_{\omega\in\Omega}$ par $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ par $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\mathbb{P}(A)=\sum_{\omega\in A}p_\omega$ par $\mathbb{P}(A)=\sum_{n/\omega_n\in A}p_n$...

Exercice 5. La formule de Poincaré, qui ressemble bizarrement à celle du crible des cardinaux.
Si $A_1,...,A_n\in\mathcal{T}$, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k+1}\sum_{1\leqslant i_1<...<i_k\leqslant n}\mathbb{P}(A_{i_1}\cap...\cap A_{i_n})\right)$$

Preuve. On fait ça par récurrence sur n:

- Pour $n=2$, c'est tout vu: $\mathbb{P}(A_1\cup A_2)=\mathbb{P}(A_1)+\mathbb{P}(A_2)-\mathbb{P}(A_1\cap A_2)$.
- Pour $n\geqslant 2$, si $\mathscr{P}_n:\mathbb{P}(\bigcup_{k=1}^n A_k)=\sum_{k=1}^n\left((-1)^{k+1}\sum_{1\leqslant i_1<...<i_k\leqslant n}\mathbb{P}(A_{i_1}\cap...\cap A_{i_n})\right)$ est vérifiée, alors:

  On sait que $\bigcup_{k=1}^{n+1}A_k=\bigcup_{k=1}^{n}A_k\cup A_{n+1}$. On applique la propriété au rang 2: $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n+1}A_k\right)=\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\cup A_{n+1}\right)=\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)+\mathbb{P}(A_{n+1})-\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\cap A_{n+1}\right)$

  On écrit maintenant la propriété au rang n:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k+1}\sum_{1\leqslant i_1<...<i_k\leqslant n}\mathbb{P}(A_{i_1}\cap...\cap A_{i_n})\right)$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\cap A_{n+1}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k+1}\sum_{1\leqslant i_1<...<i_k\leqslant n}\mathbb{P}(A_{i_1}\cap...\cap A_{i_n}\cap A_{n+1})\right)$$

(On a directement transformé $(A_{i_1} \cap A_{n+1}) \cap ... \cap (A_{i_n} \cap A_{n+1})$ par $A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_n} \cap A_{n+1}$). On remarque que les termes manquants pour aller au rang $n+1$ sont dans cette somme (on trouve tous ceux qui font intervenir A_{n+1} avec les $\binom{n}{k}$ combinaisons possibles de A_{i_j} pour chaque k).

Ne reste qu'à injecter cette deuxième somme dans la première égalité. Ainsi, $\mathscr{P}_{n+1}$ est vérifiée, et le résultat est tout démontré.

■

III Probabilités conditionnelles

Pour bien comprendre le terme "conditionnelles": on calcule la probabilité d'un événement, en faisant l'hypothèse qu'un ou plusieurs autres sont également vérifiés...

Définition 6. Si $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé et $A \in \mathcal{T}$ de probabilité non nulle, alors on définit $\mathbb{P}_A$ "probabilité conditionnellement à/sachant A" par: $\begin{array}{rcl} \mathbb{P}_A : \mathcal{T} & \longrightarrow & [0;1] \\ B & \longmapsto & \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \end{array}$.

On vérifie au passage que $\mathbb{P}_A$ est bien une probabilité sur Ω:

- $\mathbb{P}_A(\Omega) = \dfrac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)} = 1$
- Soit $(A_n) \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ 2 à 2 disjoints; alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_A\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) &= \frac{\mathbb{P}\left(A \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap A)\right)}{\mathbb{P}(A)} \\ &\underset{(A_n\cap A)\text{ 2 à 2 disjoints}}{=} \frac{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n \cap A)}{\mathbb{P}(A)} \underset{\text{ppté fam. som.}}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}_A(A_n) \end{aligned}$$

> **Exemple 4.** En prenant deux dés équilibrés, si $A =$ "la somme des 2 faces vaut 6", et $B = \{(4,2),(3,3),(2,5)\}$, alors $\mathbb{P}_A(B) = \dfrac{\frac{2}{36}}{\frac{5}{36}} = \dfrac{2}{5}$.

III-1) Formule des probabilités composées

Théorème 5. Si $A_1, ..., A_n \in \mathcal{T}$ avec $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k\right) \neq 0$, alors:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\,...\mathbb{P}_{A_1\cap...\cap A_{n-1}}(A_n) = \mathbb{P}(A_1)\prod_{k=2}^{n} \mathbb{P}_{\bigcap_{j=1}^{k-1} A_j}(A_k)$$

Preuve. On fait ça par récurrence sur n...

Méthode Desgranges: téléscoper le produit de la formule avec la définition des probas conditionnelles:

$$\begin{aligned}
\boxed{\mathbb{P}(A_1)\prod_{k=2}^{n}\mathbb{P}_{\bigcap_{j=1}^{k-1}A_j}(A_k)} &= \mathbb{P}(A_1)\prod_{k=2}^{n}\frac{\mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{j=1}^{k-1}A_j\right)\cap A_k\right)}{\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k-1}A_j\right)} \\
&= \mathbb{P}(A_1)\frac{\prod_{k=2}^{n}\mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{j=1}^{k-1}A_j\right)\cap A_k\right)}{\prod_{k=2}^{n}\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k-1}A_j\right)} \\
&= \mathbb{P}(A_1)\frac{\prod_{k=2}^{n}\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k}A_j\right)}{\prod_{k=2}^{n}\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k-1}A_j\right)} \\
&= \boxed{\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n}A_j\right)}
\end{aligned}$$

Le $\mathbb{P}(A_1)$ constitue l'inverse du premier terme du produit du bas, le reste est téléscopé comme prévu. ■

Exemple 5. Une application immédiate: 10 hommes et 15 femmes descendent d'un bus. Quelle est la probabilité que les 3 premiers soient des hommes, la quatrième une femme?

Figure 1.1: Un Mercedes O 405 N sur la feu ligne 40, à la gare d'Aubagne. *Photo: Jérémy OLIVIER*

En se contenant d'appliquer bêtement la formule, il vient

$$\mathbb{P}(H_1\cap H_2\cap H_3\cap F_4)=\mathbb{P}(H_1)\,\mathbb{P}_{H_1}(H_2)\,\mathbb{P}_{H_1\cap H_2}(H_3)\,\mathbb{P}_{H_1\cap H_2\cap H_3}(F_4)=\frac{9}{253}$$

Une autre application: une urne contient n boules blanches et n boules noires. On effectue n tirages successifs sans remise. Quelle est la probabilité:

- de ne tirer que des boules noires?

Réponse. En appliquant directement la formule, c'est (compte tenu du nombre de boules initial) $\mathbb{P}(N_1\cap\ldots\cap N_n)=\displaystyle\prod_{j=0}^{n-1}\frac{n-j}{2n-j}=\frac{1}{\binom{2n}{n}}$.

- de tirer en alternance une boule blanche puis une boule noire, si n est pair?

Réponse. $\displaystyle\prod_{j=0}^{n/2-1}\frac{n-j}{2n-j}\,\frac{n-j}{2n-j-1}=\frac{((2p)!)^2}{(p!)^2}\frac{(2p)!}{(4p)!}$

- de ne tirer qu'une seule boule blanche?

Réponse. $\dfrac{n\,(n!)^2}{(2n)!} = \dfrac{n^2}{\binom{2n}{n}}$

Une note à propos de la photo: je ne peux m'empêcher de regretter le 40 qui venait à Aubagne...

Petite digression historique, pour vous donner quelques mots de cette ligne: il y a eu des tramways sur la 40 de 1900 aux années 1950, allant de la place de l'Horloge à Noailles (gare de l'Est, aujourd'hui entrée du métro), puis dès 1958 les bus ont complètement supplanté les tramways; la voie a alors été déposée. La RATVM, devenue RTM en 1986, exploita dès lors la ligne 40, qui devint en 1999 une ligne gérée par le Conseil général des Bouches-du-Rhône, sous convention d'exploitation avec la RTM, lorsque l'État créa la notion de Périmètres de Transports Urbains. En 2010, la RTM perdit l'appel d'offre d'exploitation de la ligne au profit de la RDT 13, qui démarra l'exploitation d'une ligne numérotée 240, sur une partie de l'ancien trajet du 40, exploitée avec des cars (Irisbus Crossway LE).

La ligne 40 aura donc vécu jusqu'au premier janvier 2011, date à laquelle elle fut tronquée (ainsi que son homologue de nuit, le Fluobus 540), à La Solitude (à la lisière de La Penne-sur-Huveaune).

III-2) Formule des probabilités totales

Théorème 6. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ système complet d'événements de probabilités non nulles. Alors:

$$\forall B \in \mathcal{T}, \mathbb{P}(B) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_k)\,\mathbb{P}_{A_k}(B)$$

Preuve. $\mathbb{P}(B) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_k \cap B)$ car le système est complet; par définition des probas conditionnelles, $\boxed{\mathbb{P}(B) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_k)\,\mathbb{P}_{A_k}(B)}$. ■

Remarque 5. Dans le cas général, $\mathbb{P}(B) = \sum_{n/\mathbb{P}(A_n)\neq 0} \mathbb{P}(A_n)\,\mathbb{P}_{A_n}(B_n)$... Par ailleurs, la formule des probabilités totales reste valable pour un système quasi-complet d'événements de probabilités non nulles: faisons la démonstration.

Preuve. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système quasi complet d'événements, $B \in \mathcal{T}$.

On pose la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $B_n = \left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \cap B = \bigcup_{k=0}^{n} (A_k \cap B)$, qui est une suite croissante au sens de l'inclusion, de limite $\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_n\right) \cap B$. Étant donné que l'on a un système quasi complet, $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_n$ est presque sûr donc $\mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_n\right) \cap B\right) = \mathbb{P}(B)$.

On montre par une petite récurrence, facile, que $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k \cap B\right) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(A_k \cap B)$ (en appliquant la propriété au rang 2, sachant que $\mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k \cap B\right) \cap (A_{n+1} \cap B)\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} (A_k \cap A_{n+1}) \cap B\right) = 0$).

De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(A_k \cap B) = \mathbb{P}_{A_k}(B)\,\mathbb{P}(A_k)$, et par le théorème de continuité croissante ((B_n) étant croissante), il vient

$$\boxed{\lim_n \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(B) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_k)\,\mathbb{P}_{A_k}(B) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_k)\,\mathbb{P}_{A_k}(B)}$$

■

Exemple 6. Si l'on a $2n$ personnes, $n \in \mathbb{N}$, et que le nombre de femmes est équiprobablement réparti entre n et $2n$: quelle est la probabilité, en piochant une personne au hasard, que celle-ci soit une femme?

Déjà, explicitons l'équirépartition: si F_k est l'événement "il y a k femmes" alors $\mathbb{P}(F_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < n \\ \dfrac{1}{n+1} & \text{si } k \in [\![n; 2n]\!] \end{cases}$

Maintenant, soit F l'événement "piocher une femme". Alors

$$\boxed{\mathbb{P}(F)} = \sum_{k=1}^{2n} \mathbb{P}(F_k)\,\mathbb{P}_{F_k}(F) = \sum_{k=1}^{2n} \mathbb{P}(F_k) \times \frac{k}{2n} = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{n+1}\frac{k}{2n}\boxed{= \frac{3}{4}}$$

Exercice 6. Soit A est un événement de probabilité non nulle, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements telle que $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A$, $\mathbb{P}(A_n) \neq 0$ et si $i \neq j$, $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = 0$. On suppose de plus que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mathbb{P}(A)$.

Soit $B \in \mathcal{T}$; montrer que $\mathbb{P}_A(B) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}_A(A_k)\,\mathbb{P}_{A_k}(B)$.

Preuve. $\mathbb{P}_A(B) = \dfrac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)}$; pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}_A(A_k)\,\mathbb{P}_{A_k}(B) = \dfrac{\mathbb{P}(A\cap A_k)}{\mathbb{P}(A)}\dfrac{\mathbb{P}(A_k\cap B)}{\mathbb{P}(A_k)} = \dfrac{\mathbb{P}(B\cap A_k)}{\mathbb{P}(A)}$.

Ainsi donc, comme $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} (B\cap A_k) = B \cap \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right)$ et $\mathbb{P}\left(A \backslash \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = 0$, il vient: $\sum_{k\in\mathbb{N}} \dfrac{\mathbb{P}(B\cap A_k)}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{\mathbb{P}(B\cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}_A(B)$, d'où le résultat:

$$\boxed{\mathbb{P}_A(B) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}_A(A_k)\,\mathbb{P}_{A_k}(B)}$$

■

III-3) Formule de Bayes

Théorème 7. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$ système complet d'événements de probabilités non nulles, et $B \in \mathcal{T}$ de probabilité non nulle. Alors:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}_B(A_k) = \frac{\mathbb{P}_{A_k}(B)\,\mathbb{P}(A_k)}{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)\,\mathbb{P}_{A_n}(B)}$$

Preuve. On a $\mathbb{P}_{A_k}(B)\,\mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(A_k \cap B)$; de plus, la formule des probas totales nous donne $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)\,\mathbb{P}_{A_n}(B) = \mathbb{P}(B)$. On a donc le résultat en divisant. ■

Remarque 6. Cette formule est encore vraie pour un système quasi-complet.

Exemple 7. On a 100 dés dont 25 pipés (pour lesquels la probabilité d'obtenir un 6 est de $\frac{1}{2}$); on en prend un au hasard, on le lance et on obtient 6.

Si $\Pi =$ "dé pipé", $\Sigma =$ "obtention d'un 6", quelle est $\mathbb{P}_\Sigma(\Pi)$?

On utilise pour répondre la formule de Bayes, sur le système complet $(\Pi; \overline{\Pi})$, ce qui nous donne

$$\mathbb{P}_\Sigma(\Pi) = \frac{\mathbb{P}(\Pi)\,\mathbb{P}_\Pi(\Sigma)}{\mathbb{P}(\Pi)\,\mathbb{P}_\Pi(\Sigma) + \mathbb{P}(\overline{\Pi})\,\mathbb{P}_{\overline{\Pi}}(\Sigma)} = \frac{1}{2}$$

Autre exemple: dans une ville, il y a deux lycées; le premier forme 30% des élèves (L_1), et a un taux de réussite (R) au bac de 90%[a]; le second forme les 70% restants (L_2), pour 50% de réussite au bac. Si on attrape un élève au hasard dans la rue, $\mathbb{P}_R(L_1)$?

Encore une fois, on applique la formule de BAYES sur le système complet (L_1, L_2):

$$\mathbb{P}_R(L_1) = \frac{\mathbb{P}(L_1)\,\mathbb{P}_{L_1}(R)}{\mathbb{P}(L_1)\,\mathbb{P}_{L_1}(R) + \mathbb{P}(L_2)\,\mathbb{P}_{L_2}(R)} = \frac{27}{62}$$

[a] taux inférieur à la moyenne !!

IV Indépendance

Définition 7. Si $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé, $A, B \in \mathcal{T}$ forment un couple d'événements indépendants lorsque $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$.

Pour des événements $A_1, ..., A_n$, on dit qu'ils sont 2 à 2 indépendants lorsque pour tous i, j, $i \neq j$, $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\,\mathbb{P}(A_j)$.

Proposition 6. *Deux petits résultats:*

- *Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$, A, B sont indépendants ssi $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$.*
- *Si A, B sont indépendants, le sont aussi $A, \overline{B}$; $\overline{A}, B$; $\overline{A}, \overline{B}$.*

Preuve. Pour le premier point, c'est automatique avec le définition des probas conditionnelles, que vous devriez connaître arrivé à ce point du cours.

Pour le deuxième, on le fait en utilisant des intersections et des passages au complémentaire bien choisis: écrivons-le par exemple pour $A, \overline{B}$. On a $A \cap \overline{B} = A \cap \overline{(A \cap B)}$, d'où

$$\begin{aligned}
\boxed{\mathbb{P}\left(A \cap \overline{B}\right)} &= 1 - \mathbb{P}\left(\overline{A} \cup (A \cap B)\right) \\
&= 1 - \left(1 - \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A \cap B) - \underbrace{\mathbb{P}\left(\overline{A} \cap (A \cap B)\right)}_{0}\right) \\
&= \mathbb{P}(A)\,(1 - \mathbb{P}(B)) \\
&= \boxed{\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}\left(\overline{B}\right)}
\end{aligned}$$

■

Définition 8. Familles d'événements mutuellement indépendants.

Soit $(A_i)_{i \in I} \in \mathcal{T}^I$. $(A_i)_{i \in I}$ est dite famille d'événements mutuellement indépendants lorsque pour tout $J \in \mathcal{P}_{fini}(I)$, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j)$.

Proposition 7. *Quelques points à nouveau.*

- *L'indépendance mutuelle dans une famille entraîne l'indépendance deux à deux des événements qui la composent.*

  Preuve. *Si $i, j \in I$, $i \neq j$, alors $\{i, j\} \in \mathcal{P}_{fini}(I)$, d'où le résultat.* ■

- *La réciproque est en revanche fausse... Essayez avec des dés équilibrés et les événements A="le premier dé donne un résultat pair", B="le second dé donne un résultat impair", C="les deux lancers donnent des résultats de même parité".*
  Alors $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(B \cap C) = \frac{1}{4}$ et pourtant, $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0$.

- *Si les $A_i, i \in I$ sont mutuellement indépendants, $B_J = \bigcap_{j \in J} A_j$ (où $J \in \mathcal{P}_{fini}(I)$) avec $\mathbb{P}(B_J) \neq 0$, alors pour tout $i \in J$, $\mathbb{P}_{B_J}(A_i) = \mathbb{P}(A_i)$.*

- *Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements mutuellement indépendants, alors* $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \prod_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

  Preuve. *Soit* $B_n = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)$. *$(B_n)$ est une suite clairement décroissante et pour tout $n \in \mathbb{N}$,* $\mathbb{P}(B_n) = \prod_{k=0}^{n} \mathbb{P}(A_k)$.

  Or, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$*, donc en vertu de la propriété de continuité décroissante,* $\mathbb{P}(B_n) \underset{n\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k\right)$,

  donc lorsque $n \to \infty$, $\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \prod_{k=0}^{\infty} A_k}$. ■

- *Si $(A_n)_n \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}}$, alors: les A_n sont mutuellement indépendants ssi pour tout $N \in \mathbb{N}$, A_0,...,A_N sont mutuellement indépendants.*

  Preuve. *Pour le sens $\Rightarrow$, c'est direct: $\mathcal{P}_{fini}(\llbracket 0;N \rrbracket) \subset \mathcal{P}_{fini}(\mathbb{N})$.*

  Pour le sens $\Leftarrow$, si $J \subset \mathcal{P}_{fini}(\mathbb{N})$, alors $N = \max J$ existe et $J \subset \llbracket 0;N \rrbracket$. Comme, par hypothèse, A_0,...,A_N sont mutuellement indépendants, $(A_j)_{j\in J}$ constitue une famille d'événements mutuellement indépendants, donc $\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(A_j)$. *Ainsi, les A_n, $n \in \mathbb{N}$, sont mutuellement indépendants.* ■

- *Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants, alors soit $(B_i)_{i\in I}$ telle que $\forall i \in I, B_i \in \left\{A_i, \overline{A_i}\right\}$. Une telle famille $(B_i)_{i\in I}$ est alors mutuellement indépendante.*

  Preuve. *On le fait par récurrence sur le nombre de termes où $B_i = \overline{A}_i$.*

  ▷ *Pour où $n = 0$, il n'y a rien à faire: $(B_i)_{i\in I} = (A_i)_{i\in I}$.*

  ▷ *Pour $n = 1$: soit $J \in \mathcal{P}_{fini}(I)$; il y a un seul B_i valant $\overline{A_i}$.*
  Alors pour tout $j \in J\setminus\{i\}$, $B_j = A_j$, d'où:

$$\begin{aligned}
\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right)} &= \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{j\in J\setminus\{i\}} A_j\right) \cap A_i\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J\setminus\{i\}} A_j\right) - \mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) \\
&= \prod_{j\in J\setminus\{i\}} (\mathbb{P}(A_j))(1 - \mathbb{P}(A_j)) \\
&= \boxed{\prod_{j\in J} \mathbb{P}(B_j)}
\end{aligned}$$

  ▷ *Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$, et supposons que si n B_j sont des $\overline{A_j}$, la famille des (B_i) est toujours mutuellement indépendante. Soit $J \in \mathcal{P}_{fini}(I)$ où figurent $n+1$ termes $B_j = \overline{A_j}$; soit alors $i \in J$ tel que $B_i = \overline{A_i}$.*

Alors:

$$\begin{aligned}
\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right)} &= \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{j\in J\setminus\{i\}} B_j\right)\cap\overline{A_i}\right)\\
&= \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{j\in J\setminus\{i\}} B_j\right)\right)-\mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{j\in J\setminus\{i\}} B_j\right)\cap A_i\right)\\
&\underset{\bigstar}{=} \prod_{j\neq i}\mathbb{P}(B_j)-\mathbb{P}(A_i)\prod_{j\neq i}\mathbb{P}(B_j)\\
&= \mathbb{P}\left(\overline{A_i}\right)\prod_{j\neq i}\mathbb{P}(B_j)\\
&= \boxed{\prod_{j\in J}\mathbb{P}(B_j)}
\end{aligned}$$

■

Exercice 7. Avez-vous remarqué le ★ sous un des signes "="? Il signifie que l'hypothèse de récurrence a été utilisée ici, puisqu'il reste n termes $B_i = \overline{A_i}$ dans les intersections écrites au-dessus. À titre d'exercice, justifiez cela.

Ainsi, l'hypothèse de récurrence permet d'obtenir le produit au rang n, et la factorisation qui suit permet d'exhiber $\mathbb{P}\left(\overline{A_i}\right)$, ce qui rajoute le $n+1$-ième terme du produit.

- Fin du chapitre -