# Comment traiter un problème à 2 corps ?

L'étude d'un tel problème se ramène en fait à l'étude d'un système d'un seul point matériel, mais pas n'importe lequel : ce point est doté de propriétés particulières qui simplifient son étude, au nom de deux hypothèses :

— Le système est **constitué de deux points** $M_1$ **et** $M_2$ **seulement**, et il est **isolé**.

— Les forces internes au système sont les **seules forces d'interaction** $\vec{f_1}$ **et** $\vec{f_2}$**, champs de force conservatifs**.

**On sait déjà que l'on a** $M_1, M_2$ **deux points matériels tels que** $\vec{r*} = \vec{r_1}* - \vec{r_2}*$ **où** $\vec{r_1}* = \vec{GM_1}$**, idem pour** $M_2$**.** Le système est isolé, les forces $\vec{f_1}$ et $\vec{f_2}$ sont des champs de force conservatifs.

On peut ainsi dire que :

$$\begin{cases} m_1 \dfrac{d^2 \vec{r*}_1}{dt^2} & = \vec{f_1} = -\vec{f_2}(1) \\ m_2 \dfrac{d^2 \vec{r*}_2}{dt^2} & = \vec{f_2} = -\vec{f_1}(2) \end{cases}$$

d'où

$$m_2(1) - m_1(2) \Leftrightarrow m_1 m_2 \left( \frac{d^2 \vec{r_1}*}{dt^2} - \frac{d^2 \vec{r_2}*}{dt^2} \right) = \vec{f_2}(m_1 + m_2) \Leftrightarrow \boxed{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \left( \frac{d^2 \vec{r*}}{dt^2} \right) = \vec{f_2}}$$

ce qui s'interprète comme le PFD sur un point $M$ affublé de la masse $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, (que l'on appelle masse réduite du système) soumis à la force $\vec{f_2}$ et affublé du vecteur position $\vec{M_1 M_2}$.

Ce point $M$, compte tenu de sa définition, permet de déduire des relations entre les vecteurs vitesse, position qui sont :

— $\vec{v*}_2 = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v*}$, $\vec{v*}_1 = \dfrac{-m_2}{m_1 + m_2} \vec{v*}$

— $\vec{r*}_2 = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r*}$, $\vec{r*}_1 = \dfrac{-m_2}{m_1 + m_2} \vec{r*}$

**Il est ainsi possible de déduire les mouvements et même les positions des deux points si l'on connaît celui du point fictif** $M$**. Ce mouvement possède, entre autres (à l'aide des hypothèses de l'étude ! !) les propriétés suivantes :**

— Il est d'abord bon de savoir que $M, M_1, M_2, G$ sont tous les quatre alignés. Ainsi, le vecteur moment de la force $\vec{f_2}$ est : $\boxed{\vec{\mathcal{M}_G}(\vec{f_2})} = \vec{GM} \wedge \vec{f_2} = \boxed{\vec{0}}$ car $\vec{f_2}$ et $\vec{GM}$ sont colinéaires !

— $\boxed{\text{Le mouvement de } M \text{ est plan}}$. En effet, en appliquant le TMC à $M$, on se rend compte que le vecteur moment cinétique du système, par ailleurs constant, est orthogonal au mouvement à toute date t. On a donc le mouvement qui se fait dans l'hyperplan $(\vec{\sigma_G}*)^{\perp}$ qui est donc (vu que l'on travaille dans $\mathcal{V}_3$) un plan.

— Le mouvement de $M$, quel qu'il fût, ne change jamais de sens. En effet, en appliquant le TMC, il vient que $\vec{GM} \wedge \mu \vec{v*}$ est constant : si $\vec{v*} = \dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta}$ et $\vec{GM} = r\vec{u_r}$, alors $\boxed{\vec{GM} \wedge \mu \vec{v*}} = (r\vec{u_r}) \wedge (\dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta}) = \boxed{r^2 \dot{\theta} \vec{u_z}}$. Ce vecteur étant constant, et $r^2 \geq 0$, il vient que $\dot{\theta}$ ne peut pas changer de signe : le sens du mouvement ne change donc pas !

— Le mouvement obéit à la loi des aires : $\boxed{\text{Le vecteur rayon } \vec{GM} \text{ balaie des aires égales pendant des durées égales}}$. En effet, lorsque l'on se penche sur $dS$ l'aire balayée par $\vec{GM}$ pendant la durée $dt$, si l'on note $M'$ la position de $M$ à la date $t + dt$, on voit que l'on peut faire (avec un joli petit dessin) l'approximation telle

que $dS$ soit l'aire du triangle $GMM'$.
Ainsi, on déduit que "$dS = \frac{1}{2}\Big($Aire du parallélogramme construit sur $\vec{GM}$ et $\vec{MM'}\Big)$". C'est de la physique ! Et ça se traduit par (reportez-vous au chapitre 17 de YD pour cela) :
$dS = \frac{1}{2}\left\|\vec{GM} \wedge \vec{MM'}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\vec{GM} \wedge d\vec{GM}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\vec{GM} \wedge \vec{v*}dt\right\| \underset{\text{en posant } \vec{C} = \vec{GM} \wedge \vec{v*}dt}{=} \frac{1}{2}\left\|\vec{C}\right\| = \frac{1}{2}|C|$ où $C$ est la constante de la loi des aires. Ainsi $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}C = cte$ ce qui induit bien la loi des aires -relisez-la- (on appelle $\frac{dS}{dt}$ la vitesse aréolaire, la vitesse de variation de l'aire $S$).

**On peut même se donner une idée du bilan énergétique du système et de son évolution au cours du temps : les hypothèses nous garantissent déjà que l'énergie mécanique totale du système est constante au cours du temps (il est isolé et les forces intérieures sont des champs de force conservatifs).** Nous allons montrer que l'énergie potentielle effective (que nous définirons) ne dépend que de $r = \|\vec{r*}\| = \left\|\vec{M_1M_2}\right\|$ ; si tel est le cas, on obtiendra sans aucune difficulté de jolies courbes définissant l'énergie potentielle, d'où l'on pourra déduire de folles choses comme des portraits de phase, des positions d'équilibre et leur stabilité... Que du bonheur !

**C'est parti.** D'abord, on se place en coordonnées polaires. On a ainsi :
$\vec{\sigma_G}* = \vec{GM} \wedge \mu\vec{v} = r\vec{u_r} \wedge \mu(\dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta}) = r^2\dot{\theta}\vec{u_z}$ (constant !) et (sachez déjà que $E_p$ ne dépend que de $r$)
$E = E_c + E_p(r) = \frac{1}{2}\mu v^2 + E_p(r) = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + E_p(r)$

Il vient que : $\dot{\theta} = \frac{\sigma_G*}{mr^2}$ où $\sigma_G*$ est la norme de $\vec{\sigma_G}*$.

D'où : $E = \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{\sigma_G*}{m^2r^4}\right)\right] = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{\sigma_G*}{2mr^2} + E_p(r)$. Mais alors, $\frac{\sigma_G*}{2mr^2} + E_p(r)$ ne dépend que de $r$ ! On pose alors $U_{eff} = \frac{\sigma_G*}{2mr^2} + E_p(r)$.

**Voilà une bonne chose de faite** : le résultat général est établi, $\boxed{U_{eff} = \frac{\sigma_G*}{2mr^2} + E_p(r) \text{ ne dépend que de } r}$.

Mais on peut en dire un peu plus : vu que l'on a $E(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{eff}(r)$, et que $\forall t, E = cte \geq 0$ (eh oui, le système est conservatif), alors il vient que $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = E(r) - U_{eff}(r) \geq 0 \Rightarrow \boxed{\forall t, E(r) \geq U_{eff}(r)}$.

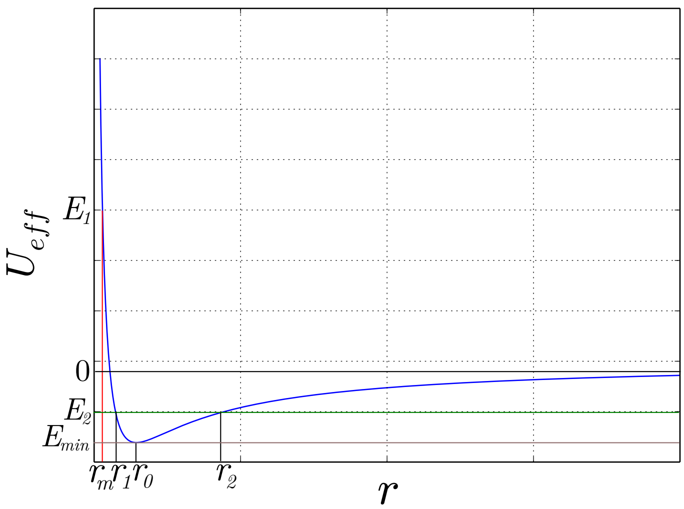
Si maintenant, on a $E_p(r) = \frac{-k}{r}$ (ce qui risque d'arriver souvent, car c'est le cas de l'interaction gravitationnelle, et de l'interaction coulombienne) : on peut aller plus loin.

On a alors : $U_{eff} = \frac{\sigma_G*}{2mr^2} - \frac{k}{r}$ soit $\frac{dU_{eff}}{dt} = \frac{-2r\sigma_G*}{2mr^4} - \frac{k}{r^2} = -\frac{\sigma_G*}{mr^3} + \frac{k}{r^2}$.

Cherchons les valeurs d'annulation de cette dérivée : $\frac{dU_{eff}}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sigma_G*}{mr^3} = \frac{k}{r^2} \Leftrightarrow \frac{\sigma_G*}{mr} = k \Leftrightarrow \boxed{r = \frac{\sigma_G*}{mk}}$.
C'est la seule valeur qui annule la dérivée de l'énergie potentielle effective, qui n'est définie que pour $r \in \mathbb{R}^{+*}$.
Il faut alors que $\frac{\sigma_G*}{mk} > 0$ pour que $\frac{dU_{eff}}{dt}$ s'annule.

Deux cas se présentent alors :

— **1er cas** : $\frac{\sigma_G*}{mk} > 0$. $\frac{dU_{eff}}{dt}$ s'annule une et une seule fois pour $r = \frac{\sigma_G*}{mk}$. On a alors une courbe ayant l'allule suivante :



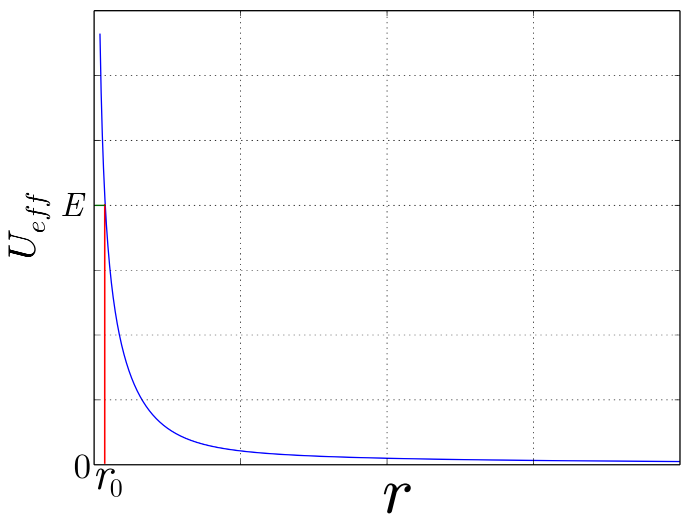

Ainsi, plusieurs sous-cas se présentent selon les conditions initiales (la valeur initiale de l'énergie potentielle).

— 1er sous-cas : $E = E_1 \geq 0$. La conditon $E \geq \frac{U_{eff}}{r}$ n'est vérifiée que pour $r \in [r_m; +\infty[$. À ce moment-là, $r_m$ constitue la distance minimale d'approche (le point $M$ ne peut pas s'approcher plus près de $G$). $M$ ne peut que partir à l'infini : **les seuls états possibles sont les états de diffusion**.

— 2e sous-cas : $E = E_2/U_{min} < E_2 < 0$. Dans ce cas, le point $M$ ne peut pas partir à l'infini : **les seuls états possibles sont les états liés**. On peut resteindre la trajectoire du point $M$ entre deux cercles de rayons respectifs $r_1$ et $r_2$ tels que $U_{eff}\left(r_{\frac{1}{2}}\right) = E_2$.

— 3e sous-cas : $E = E_{min}$. Le point est alors bloqué sur un cercle de rayon $r = r_0$ ; le mouvement de $M$ est alors circulaire. De plus, comme $C = r^2\dot{\theta} = cte$, il vient que $\dot{\theta} = cte$ d'où : **le mouvement de** $M$ **est un mouvement circulaire uniforme.**

— **2e cas** : $\frac{\sigma_G *}{mk} \leq 0$. On a alors une courbe ayant l'allure suivante :




Cette courbe nous indique clairement que $E$ ne peut qu'être positif et que les seuls états possibles sont les états de diffusion. Ce sera par exemple le cas pour l'interaction coulombienne de deux charges de même signe.