Opérations sur les champs vectoriels

Sommaire

I Gradient $\overrightarrow{\mathrm{grad}}$ . . . 1
II Divergence div . . . 2
1) Définition . . . 2
2) Expressions dans les systèmes de coordonnées usuels . . . 2
III Rotationnel $\overrightarrow{\mathrm{rot}}$ . . . 2
1) Définition . . . 2
2) Expression dans les différents systèmes de coordonnées . . . 3
IV Opérateur nabla $\overrightarrow{\nabla}$ . . . 3
V Composition de champs . . . 3
VI Composition d'opérateurs . . . 3
VII Laplacien vectoriel Δ . . . 4
VIII Exercices en vrac . . . 4

Les champs vectoriels sont simplement la donnée d'applications $\mathbb{R}^j \to \mathcal{V}_3$ où $j \in \{1,2,3\}$ (ou éventuellement $\mathbb{C} \to \mathcal{V}_3$). Ces champs permettent de modéliser de nombreux phénomènes physiques dont l'action en tout point de l'espace (ou d'une droite, ou du plan) peut être donnée par une intensité, une direction et un sens. À l'instar des différentes transformations qui existent pour les fonctions à valeurs réelles, les champs vectoriels ont les leurs, que ce fascicule explicite.

Toutes les applications considérées sont $\mathcal{C}^\infty$ suivant chacune de leurs composantes. L'ensemble $\mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{R}^j, \mathcal{V}_3\right)$ sera noté $\mathbf{V}$, l'ensemble $\mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{R}^j, \mathbb{R}\right)$ sera noté $\mathbf{S}$.

I Gradient $\overrightarrow{\mathrm{grad}}$

L'application gradient est définie par

$$\boxed{\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{grad}} \ : \mathbf{S} &\to \mathbf{V} \\
f &\mapsto \frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{e_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{e_z} && \text{cartésiennes} \\
&= \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{e_z} && \text{cylindriques} \\
&= \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\overrightarrow{e_\varphi} && \text{sphériques}
\end{aligned}}$$

Cet opérateur est le plus connu d'entre tous, puisqu'il est utilisé depuis la sup (voire, connu depuis la terminale). Son expression dans les trois systèmes de coordonnées est à connaître pour les concours.

II Divergence div

1) Définition

Pour introduire la divergence, il faut d'abord prouver mathématiquement l'assertion suivante:

$$\exists f \in \mathcal{F}(\mathbf{V}, \mathbf{S}) / \forall \overrightarrow{U} \in \mathbf{V} \ \forall \Sigma \text{ surface fermée } \exists V \text{ volume} / \Phi_\Sigma\left(\overrightarrow{U}\right) = \oiint_\Sigma \overrightarrow{U}(M) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} = \iiint_V f\left(\overrightarrow{U}\right) \mathrm{d}\tau$$

Une telle application f est appelée divergence de $\overrightarrow{U}$.

L'application divergence est donnée par

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{div} &: \mathbf{V} \to \mathbf{S} \\ &\overrightarrow{U} \mapsto \operatorname{div} \overrightarrow{U} / \Phi_\Sigma\left(\overrightarrow{U}\right) = \iiint_V \operatorname{div} \overrightarrow{U} \end{aligned}}$$

ce qui constitue la relation d'Ostrogradsky.

2) Expressions dans les systèmes de coordonnées usuels

On montre que l'application div s'écrit aussi:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \operatorname{div} : \mathbf{V} \to \mathbf{S} & \\ \overrightarrow{U} = U_x \overrightarrow{e_x} + U_y \overrightarrow{e_y} + U_z \overrightarrow{e_z} \mapsto \dfrac{\partial U_x}{\partial x} + \dfrac{\partial U_y}{\partial y} + \dfrac{\partial U_z}{\partial z} & \text{cartésiennes} \\ \overrightarrow{U} = U_r \overrightarrow{e_r} + U_\theta \overrightarrow{e_\theta} + U_z \overrightarrow{e_z} \mapsto \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial [r U_r]}{\partial r} + \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{\partial U_z}{\partial z} & \text{cylindriques} \\ \overrightarrow{U} = U_r \overrightarrow{e_r} + U_\theta \overrightarrow{e_\theta} + U_\varphi \overrightarrow{e_\varphi} \mapsto \dfrac{1}{r^2} \dfrac{\partial \left[r^2 U_r\right]}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2 \sin\theta} \dfrac{\partial [\sin\theta U_\theta]}{\partial \theta} + \dfrac{1}{r^2} \dfrac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} & \text{sphériques} \end{array}}$$

où n'est à retenir que l'expression en coordonnées cartésiennes. Néanmoins, il n'est pas prohibé de retenir les autres.

III Rotationnel $\overrightarrow{\mathrm{rot}}$

1) Définition

Tout comme la divergence, cet opérateur se définit par la vérification de l'assertion mathématique qui suit:

$$\exists g \in \mathbf{V}^{\mathbf{V}} / \forall \overrightarrow{U} \in \mathbf{V} \ \forall (C) \text{ contour fermé délimitant } \Sigma \oint_{(C)} \overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \Phi_\Sigma\left(g\left(\overrightarrow{U}\right)\right) = \oiint_\Sigma g\left(\overrightarrow{U}(M)\right) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S}$$

Dans cette relation, Σ n'est pas unique; à un même contour peuvent correspondre plusieurs surfaces.

L'application g ainsi définie s'appelle rotationnel et est notée $\overrightarrow{\mathrm{rot}}$. Elle est définie par:

$$\boxed{\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{rot}} &: \mathbf{V} \to \mathbf{V} \\ &\overrightarrow{U} \mapsto \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overrightarrow{U} / \oint_{(C)} \overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \Phi_\Sigma\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overrightarrow{U}\right) = \oiint_\Sigma \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \overrightarrow{U} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} \end{aligned}}$$

Cette relation est aussi appelée relation de Stokes.

2) Expression dans les différents systèmes de coordonnées

L'utilisation d'une expression pure du rotationnel est à éviter autant que possible, pour la bonne et simple raison qu'elle demande **énormément** de calculs de dérivées partielles (ce qui n'est somme toute pas marrant). Néanmoins, son expression en coordonnées cartésiennes est donnée ici:

$$\boxed{\begin{array}{l} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ : \mathbf{V} \to \mathbf{V} \\ \overrightarrow{U} = U_x\overrightarrow{e_x} + U_y\overrightarrow{e_y} + U_z\overrightarrow{e_z} \mapsto \left(\dfrac{\partial U_z}{\partial y} - \dfrac{\partial U_y}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_x} + \left(\dfrac{\partial U_x}{\partial z} - \dfrac{\partial U_z}{\partial x}\right)\overrightarrow{e_y} + \left(\dfrac{\partial U_y}{\partial x} - \dfrac{\partial U_x}{\partial y}\right)\overrightarrow{e_z} \quad \text{cartésiennes} \end{array}}$$

IV Opérateur nabla $\overrightarrow{\nabla}$

La notation nabla[1] (delta renversé), équivalente au gradient compte tenu de son expression, permet d'écrire, au moins en coordonnées cartésiennes de façon directe, de façon indirecte dans les autres systèmes de coordonnées (il faudra le calculer à chaque utilisation), les opérateurs vus ci-dessus:

$$\overrightarrow{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Soit: $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ f = \overrightarrow{\nabla} f}$, $\boxed{\mathrm{div}\ \overrightarrow{U} = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{U}}$, $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{U} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{U}}$.

V Composition de champs

L'opérateur nabla se comporte comme un dérivateur mathématique: il a la particularité de dériver les champs scalaires comme leur gradient, les champs vectoriels comme leur divergence dans le cas du produit scalaire, leur rotationnel dans le cas du produit vectoriel.

De la même façon que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(u\left(t\right)v\left(t\right)\right) = u'\left(t\right)v\left(t\right) + v'\left(t\right)u\left(t\right)$, on a, en notant $\cdot$ le produit scalaire, $\wedge$ le produit vectoriel et $\times$ le produit par les scalaires:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{div}\ \left[f \times \overrightarrow{U}\right] & = & \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ f \cdot \overrightarrow{U} + f \times \mathrm{div}\ \overrightarrow{U} \\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \left[f \times \overrightarrow{U}\right] & = & \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ f \wedge \overrightarrow{U} + f \times \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{U} \\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \left[\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V}\right] & = & \left(\mathrm{div}\ \overrightarrow{V}\right) \times \overrightarrow{U} - \left(\mathrm{div}\ \overrightarrow{U}\right) \times \overrightarrow{V} + \left(\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \right) \times \overrightarrow{U} - \left(\overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \right) \times V \\ \mathrm{div}\ \left[\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V}\right] & = & \left(\mathrm{div}\ \overrightarrow{U}\right) \wedge \overrightarrow{V} \\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \left[f \times g\right] & = & g \times \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ f + f \times \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ g \end{array}$$

Il existe plein d'autres combinaisons possibles, seules quelques-unes sont écrites ici.

VI Composition d'opérateurs

On notera que la composition de tous les opérateurs n'est pas possible en raison du domaine de définition de ces applications (**S** ou **V**).

[1] à ne pas confondre avec une starlette du paysage audiovisuel français dotée d'un égo sans limite et d'un QI compris entre 0 et celui d'une poule...

On a:

$$\text{div}\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{U} : \overrightarrow{\nabla} \cdot \left(\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{U}\right) = \overrightarrow{0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{div}\ \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{U} = \overrightarrow{0}}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{grad}}\ f : \nabla \wedge (\nabla \times f) = \overrightarrow{0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{grad}}\ f = \overrightarrow{0}}$$

On montre que les réciproques sont également vérifiées, c.à.d:

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{U} = \overrightarrow{0} \quad \Rightarrow \quad \exists f \in \mathbf{S} / \overrightarrow{U} = \overrightarrow{\text{grad}}\ f$$

$$\text{div}\ \overrightarrow{U} = \overrightarrow{0} \quad \Rightarrow \quad \exists \overrightarrow{V} \in \mathbf{V} / \overrightarrow{U} = \overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{V}$$

VII Laplacien vectoriel Δ

Le laplacien vectoriel est la donnée de l'application suivante:

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta : \mathbf{V} &\to \mathbf{V} \\ \overrightarrow{U} &\mapsto \nabla^2 \overrightarrow{U} \end{aligned}}$$

On peut donner son expression en coordonnées cartésiennes, qui est à connaître bien qu'elle soit quasiment évidente:

$$\boxed{\begin{aligned} &\Delta : \mathbf{V} \to \mathbf{V} \\ &\overrightarrow{U} = U_x \overrightarrow{e_x} + U_y \overrightarrow{e_y} + U_z \overrightarrow{e_z} \mapsto \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} \overrightarrow{e_x} + \frac{\partial^2 U_y}{\partial y^2} \overrightarrow{e_y} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} \overrightarrow{e_z} \quad \text{cartésiennes} \end{aligned}}$$

Il revient à la charge du lecteur, à titre d'exercice, de le déterminer en coordonnées cartésiennes et sphériques (les expressions ne sont pas trop compliquées par ailleurs).

VIII Exercices en vrac

Exercice 1. Déterminer div $\overrightarrow{\text{grad}}$, $\overrightarrow{\text{grad}}$ div , $\overrightarrow{\text{grad}}$ $\overrightarrow{\text{rot}}$.

Exercice 2. Déterminer $\overrightarrow{\text{grad}}\ \overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{V}$, div $\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V}$.

Exercice 3. Déterminer l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques puis, éventuellement, sphériques.

Exercice 4. Soit $\overrightarrow{U} = f(x)\overrightarrow{e_x} + g(x)\overrightarrow{e_y}$. Déterminer $\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{U}$; pour cela, on pourra utiliser un rectangle de largeur a, de hauteur b et faire de sa surface la surface Σ.

Ces exercices ne sont que quelques exemples de manipulation des opérateurs, mais il est bien évident que c'est leur application au niveau de la résolution de problèmes physiques qui nous intéressera par la suite. Les opérateurs ne sont que des outils, pas des fins!