Les trois théorèmes sur Fourier

Accompagnés de leur démonstration

Dans ce poly, on notera $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions continues, 2π-périodiques et régularisées; $\mathcal{C}_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions continues et 2π-périodiques; $\mathcal{C}_{2\pi}^{pm}$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux et 2π-périodiques.

Definition. On pose $C_k = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-ikt}\mathrm{d}t$ ($k \in \mathbb{Z}$), qui peut se décomposer en $a_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt dt$ et $b_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\mathrm{d}t$. Est appelée $S_n(f)$ la somme $\displaystyle\sum_{k\in[\![-n;n]\!]} C_k e_k$ où les $e_k : t \mapsto e^{ikt}$ pour $k \in \mathbb{Z}$. La famille $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est libre, et on appelle F_n l'espace qu'elle engendre pour $-n \leqslant k \leqslant n$; les e_k sont appelés polynômes orthogonaux, puisqu'ils le sont pour le produit scalaire qui va être introduit.

Proposition. *Est un produit scalaire hermitien sur $\mathcal{C}_{2\pi}^{pm}$ l'application $\langle f|g\rangle : (f,g) \mapsto \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\bar{f}g$; la norme associée peut s'écrire: $\|f\|_2^2 = \|S_n(f)\|_2^2 + \mathrm{d}^2(f, F_n)$ où $\|S_n(f)\|_2^2 = \displaystyle\sum_{k\in[\![-n;n]\!]} |C_k|^2$.*

Proof. On se convaincra sans difficulté particulière, compte tenu de la linéarité de l'intégrale, que $\langle f|g\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique; pour ce qui est de la définition positive, elle est immédiate pour les fonctions à valeurs réelles ($f^2 \geqslant 0$, et si $f \neq 0$, alors $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_I f^2 > 0$). Pour les fonctions à valeurs complexes, il suffit de considérer que $\bar{f}f = (\Re f - i\Im f)(\Re f + i\Im f) = (\Re f)^2 + (\Im f)^2$. □

Theorem 1. De convergence en moyenne quadratique.

Soit $f \in \mathcal{D}$. On a:

$$S_n(f) \text{ converge en moyenne quadratique vers } f$$

Proof. Nous allons procéder en trois temps: montrer la propriété pour les polynômes trigonométriques, puis que cet ensemble est banse dans $\mathcal{D}$ pour la norme 2, et nous en déduirons immédiatement la propriété sur $\mathcal{D}$. On pose $\mathcal{P} = \mathrm{vect}\,(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$.

- Première étape: le cas où $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$. Soit alors $\varepsilon > 0$, $P \in \mathcal{P}$ tel que $\|P - f\|_2 \leqslant \varepsilon$ (un tel P existe par le théorème de densité de WEIERSTRASS en version trigonométrique[1]). Alors, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P \in F_n$. Donc, pour tout $m \geqslant n$, $\|S_m(f) - f\|_2 \leqslant \|P - f\|_2 \leqslant \varepsilon$, puisque P appartient aussi à F_m. Ceci prouve que $S_n(f)$ converge pour la norme 2 vers f.

- Deuxième étape: la densité de $\mathcal{C}_{2\pi}$ dans $\mathcal{D}$. On sait déjà que les polynômes trigonométriques sont denses dans $\mathcal{C}_{2\pi}$; par ailleurs, pour tout $f \in \mathcal{D}$, si $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ désigne les points de discontinuité de f (points où elle a donc été régularisée), alors on propose la construction de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in (\mathcal{C}_{2\pi})^{\mathbb{N}}$ qui suit:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n : t \mapsto \begin{cases} f(t) & \text{si } \forall j \in \mathbb{N}, t \notin \left[a_j - \dfrac{1}{n}; a_j + \dfrac{1}{n}\right] \\ f\left(a_j - \dfrac{1}{n}\right) + \dfrac{n\left(f\left(a_j + \frac{1}{n}\right) - f\left(a_j - \frac{1}{n}\right)\right)\left(t - a_j + \frac{1}{n}\right)}{2} & \text{si } \exists j \in \mathbb{N}, t \in \left[a_j - \dfrac{1}{n}; a_j + \dfrac{1}{n}\right] \end{cases}$$

[1] il est bon de rappeler ce théorème: les polynômes trigonométriques $(e_k)_k$ sont denses dans les fonctions uniformément continues sur un segment

Ceci représente basiquement f hors les points de discontinuité, et des droites affines reliant $f\left(a_j - \frac{1}{n}\right)$ à $f\left(a_j + \frac{1}{n}\right)$ aux points de discontinuité a_j. Il est alors clair que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers f. Sachant que les polynômes trigonométriques sont banses dans $\mathcal{C}_{2\pi}$, et que $\mathcal{C}_{2\pi}$ est dense dans $\mathcal{D}$, alors[2] $\underline{\mathcal{P}}$ est dense dans $\mathcal{D}$.

- Il est alors maintenant clair que pour tout $f \in \mathcal{D}$, $S_n(f)$ converge en moyenne quadratique vers f.

□

Theorem 2. De convergence normale.

Si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ et f est $\mathcal{C}^{1pm}$ alors les sommes $\sum_{k=0}^{+\infty} |C_k|$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} |C_{-k}|$ convergent, et $(S_n(f))_n$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$. Autrement dit, la série de terme général $\sum C_k e^{ikx} + C_{-k} e^{-ikx}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Proof. Si $\mathbf{D}f$ désigne la dérivation de f (là où c'est possible), alors $\forall k \in \mathbb{N}, C_k(\mathbf{D}f) = inC_k(f)$. Par conséquent, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $|C_k(f)| \leqslant \frac{|C_k(\mathbf{D}f)|}{n}$ soit $|C_k(f)| \leqslant \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n^2} + |C_k(\mathbf{D}f)|^2\right]$, ce qui nous assure la convergence des sommes $\sum_{k=0}^{+\infty} |C_k|$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} |C_{-k}|$, et la convergence uniforme de $(S_n(f))$.

Par ailleurs, $(S_n(f))$ convergeant uniformément vers une fonction g $\mathcal{C}_{2\pi}$, elle converge aussi en moyenne quadratique vers g. Le théorème de convergence en moyenne quadratique nous indique (puisque $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}_{2\pi}$) que $(S_n(f))$ converge en moyenne quadratique vers f; par unicité de la limite, il vient que $g = f$. □

Theorem 3. De Dirichlet.

Si f est $\mathcal{C}_{2\pi}$ et $\mathcal{C}^{1pm}$, alors $(S_n(f))$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $\tilde{f}$ (régularisée de f).

Proof. On pose $D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k\in[\![-n;n]\!]} e^{ikt}$, et l'on prouve que $D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}$. On sait que $S_n(f) = D_n * f$ (produit de convolution intégral).

Pour tous $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(x) - S_n(f(x)) &= f(x) - \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\, D_n(t)\,\mathrm{d}t \\
&\underset{\int_{[-\pi;\pi]} D_n = 1}{=} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(t) - f(x-t)\right) D_n(t)\,\mathrm{d}t \\
&\underset{f(x) = \frac{f(x^+) - f(x^-)}{2}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \left(f\left(x^-\right) - f(x-t)\right) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} \left(f\left(x^+\right) - f(x-t)\right) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

La fonction $\varphi : t \mapsto \frac{f(x^-) - f(x-t)}{\sin\frac{t}{2}} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t$ est continue par morceaux sur $]0;\pi]$; de plus, $f(x-t) \underset{t\to 0^+}{=} f\left(x^-\right) + At + t\varepsilon(t)$ où $\varepsilon \to_{0^+} 0$. Par conséquent, $\varphi(t) \underset{t\to 0}{=} 2\frac{At + t\varepsilon(t)}{t} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t$. $t \mapsto 2\frac{At + t\varepsilon(t)}{t}$ étant intégrable sur $[0;\pi]$, en appliquant le lemme de Riemann-Lebesgue[3], il vient que φ est intégrable sur ce segment et que cette intégrale, lorsque $n \to +\infty$, tend vers zéro.

Il suffit d'appliquer la même procédure à l'autre intégrale, pour prouver le théorème de Dirichlet. □

[2] la propriété de densité est transitive

[3] lemme dont on rappelle l'énoncé: si $f : I \to \mathbb{R}$ est intégrable sur I, alors $\int_I f(t)\, e^{-ist}\mathrm{d}t \to_{s\to+\infty} 0$.