Quelques éléments d'étude énergétique des systèmes.

Sommaire

Lorsque, en mécanique, on se penche sur un système quelconque, on cherche souvent à se donner la nature de son mouvement, ainsi que la loi horaire qui le régit. Si les considérations mécaniques que l'on peut trouver dans la *boîte à outils* suffisent en général à résoudre le problème, elles sont parfois fastidieuses et longues à mobiliser, et demandent beaucoup de calculs. L'étude énergétique du système découle directement de l'étude mécanique et permet de s'affranchir d'un certain nombre de calculs dans certains cas précis, en particulier lorsque le système étudié n'a qu'un seul degré de liberté[1].

[1] C'est même une hérésie que de faire autrement dans ce cas. Or dungeon. Three hours dungeon!

I Notions de puissance et travail

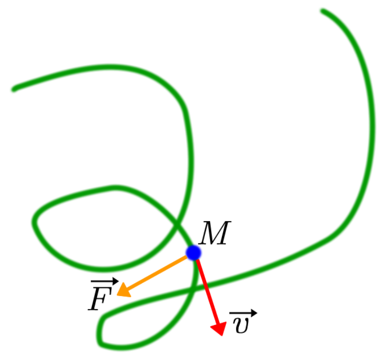

Figure 1: *Mouvement d'un mobile au cours du temps.*

La puissance d'une force $\overrightarrow{F}$ appliquée en un point M se définit par $\boxed{P = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v_{\mathcal{R}}(M)}}$. Lorsque le mobile se déplace, la force peut travailler: le travail s'exprime comme la somme de puissances infinitésimales durant un temps infinitésimal; ainsi, $\boxed{W_{A\to B} = \int_A^B \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l}}$. Il s'agit aussi de la somme des travaux élémentaires: $\boxed{\delta W = P\mathrm{d}t = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l}}$.

La puissance totale des forces appliquées à un système n'est ni plus ni moins que la somme des puissances des forces intérieures (de points d'applications M_i et M_j décrivant tout le solide) et des forces extérieures (que l'on appliquera au barycentre) soit:

$$\boxed{P = P_{ext} + P_{int}}$$

La puissance intérieure étant le fruit du principe des actions réciproques, on obtient en posant $r_{ij} = M_iM_j$ que:

$$\boxed{P_{int} = \sum_{(i,j)\in\mathcal{S}} f_{ij}\frac{\mathrm{d}r_{ij}}{\mathrm{d}t}}$$

On remarquera que **la puissance dépend du référentiel**, ne serait-ce qu'à cause de la présence de forces d'inertie propres au référentiel considéré.

Dans le cas d'un système solide, on notera que $P_{int} = 0$ *dans la mesure où les* r_{ij} *sont constants sur le solide.*

II Travail des forces appliquées à un système

Pour chaque force, le travail élémentaire se traduit, pour un déplacement infinitésimal, par

$$\delta W = P_{int}\mathrm{d}t + P_{ext}\mathrm{d}t = \sum_{i\neq j} f_{ij}\mathrm{d}r_{ij} + \sum \overrightarrow{F_{\varepsilon\to M_i}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}M_i}$$

où $\overrightarrow{\mathrm{d}M_i}$ est vulgairement le déplacement de M_i durant $\mathrm{d}t$.

Pour calculer ce δW, nous allons distinguer trois cas.

- Cas d'un solide en rotation par rapport à un axe Δ fixe: **vachement super important!**

On élimine la puissance intérieure, et il reste

$$\boxed{P_{\mathcal{R}}(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{F} \cdot \left(\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{OA}\right) = \mathcal{M}_\Delta \omega}$$

Dans ce cas précis, on peut établir un tableau de correspondance entre ce que l'on sait du point matériel et ce qu'il en advient sur un solide en rotation par rapport à un axe fixe:

Lorsque vous recherchez pour un point matériel...	Vous recherchez pour le solide en rotation...
m	J_Δ
$\overrightarrow{v}$	ω
$\overrightarrow{F} = m\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}$	$\mathcal{M}_\Delta = J_\Delta \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$
$\varepsilon_K = \dfrac{1}{2}mv^2$	$\varepsilon_K = \dfrac{1}{2}J_\Delta\omega^2$
$P = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v}$	$P = \mathcal{M}_\Delta\omega$

Dans ce cas, le travail s'exprime ainsi:

$$\boxed{\delta W = \mathcal{M}_\Delta \mathrm{d}\theta}$$

$$\boxed{W_{A\to B} = \int_A^B \mathcal{M}_\Delta \mathrm{d}\theta}$$

- Cas général: objet quelconque en mouvement quelconque
  On ne peut pas dire grand-chose, comme d'habitude, sur ce genre de mouvements; on peut toutefois dire, en conséquence de la relation de Varignon, que si $A, B \in \mathcal{S}$ alors:

$$\boxed{\forall B \in \mathcal{S}, P = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v(A)} = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v(B)} + \overrightarrow{\Omega} \cdot \overrightarrow{\mathcal{M}_B\left(\overrightarrow{F}\right)}}$$

soit en particulier:

$$\boxed{P = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v(G)} + \overrightarrow{\Omega} \cdot \overrightarrow{\mathcal{M}_G\left(\overrightarrow{F}\right)}}$$

III Théorèmes de la puissance cinétique et de l'énergie cinétique

Une belle formule vaut mieux qu'un long discours: le théorème de la puissance cinétique s'exprime:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\varepsilon_K}{\mathrm{d}t} = P = P_{int} + P_{ext}}$$

Sous forme intégrée, celui-ci donne naissance au théorème de l'énergie cinétique:

$$\boxed{\Delta_{A\to B}\left(\varepsilon_K\right) = W_{A\to B}\mathrm{ext} + W_{A\to B}\mathrm{int}}$$

IV Théorème de l'énergie mécanique

1) Énergie potentielle des forces extérieures

A priori, $W_{A\to B}\left(\overrightarrow{F}\right)$ dépend du chemin suivi pour aller de A à B.

Si $\overrightarrow{F}$ est une force extérieure qui ne dépend pas de la trajectoire suivie, alors on dit que $\overrightarrow{F}$ dérive d'une énergie potentielle, ou est conservative, et l'on a $\boxed{\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\varepsilon_p}$.

On a également:

$$\boxed{\forall C \text{ chemin suivi}, W_{A\to B} = -\int_A^B \mathrm{d}\varepsilon_p = \varepsilon_p(A) - \varepsilon_p(B)}$$

En coordonnées cartésiennes, une technique de détection des forces conservatives est le critère de Schwarz, qui nous dit que:

$$\boxed{\overrightarrow{F} \text{ conservative} \Leftrightarrow \exists \varepsilon_p / \frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial f_y}{\partial x}}$$

Ce critère est aussi appelé “critère des dérivées croisées”, regardez bien pourquoi.

2) Énergie potentielle d'interaction

Pour que les forces internes au système soient conservatives, il suffit qu'elles ne dépendent que de $r_{ij} = M_i M_j$. Toute autre dépendance rend ces forces non-conservatives.

3) The theorem

On définit préalablement l'énergie potentielle du système, comme la somme de ses énergies potentielles extérieure et d'interaction.

Le théorème de l'énergie cinétique nous permet alors de déduire le résultat qui suit, qui est hyper-super-vachement important:

$$\boxed{\Delta_{A\to B}\varepsilon_m = W_{A\to B}\text{ext}_{NC} + W_{A\to B}\text{int}_{NC}}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}\varepsilon_m}{\mathrm{d}t} = P_{ext\ NC} + P_{int\ NC}}$$

Autrement dit:

Lorsqu'un système est conservatif, son énergie mécanique est constante!!

Il s'agit **DU** théorème à utiliser lorsque le système étudié n'a qu'un seul degré de liberté[2].

V Des exemples

Divers exemples se présentent à nous:

- Le bien connu roulement sans glissement:

[2] on s'en doutait: les forces qui travaillent ne prennent qu'un seul paramètre en entrée...

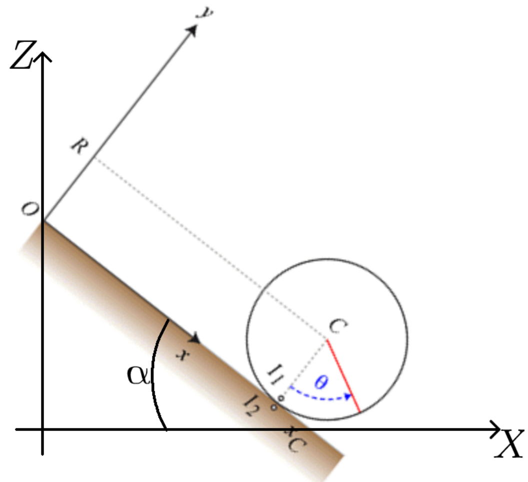

Figure 2: *Roulement sans glissement.*

Le roulement sans glissement ne laisse qu'un seul degré de liberté à la roue; on réalise d'abord une étude cinématique:

- $\overrightarrow{v(C)} = v\overrightarrow{e_x}$ où $v = a\omega$
- $Z_c = -x_c \sin\alpha + \text{cte}$ (on choisira la constante nulle)

On en déduit l'énergie mécanique du système: $\boxed{\varepsilon_m = \frac{1}{2}mv^2 + \underbrace{\frac{1}{2}J_{Cy}\omega^2}_{\frac{1}{4}mv^2} + (-mgx_c\sin\alpha) = \text{cte}}$

On dérive tout cela et il vient: $\boxed{\frac{3}{2}mv\frac{dv}{dt} = mgv\sin\alpha}$. Quelque chose nous embête: le cas $v = 0$; il se trouve que celui-ci a été *artificiellement* créé lors de la constructioin du TEC, il doit donc être éliminé. On peut donc simplifier par v.

On trouve donc par cette formule l'accélération du barycentre du système: $\boxed{\overrightarrow{a(C)} = \frac{2}{3}g\sin\alpha\overrightarrow{e_x}}$.

On aurait tout aussi bien pu obtenir ce résultat par une étude mécanique, tout aussi longue mais au prix de quelques erreurs de signe lors des projections....

- Un autre exemple est le pendule simple (tige sans masse oscillant autour d'un axe horizontal avec une liaison parfaite, faisant un angle θ avec la verticale):

  L'étude énergétique nous donne l'énergie potentielle du poids (seule force travaillant) $\varepsilon_p = m_g z$; l'énergie cinétique nous est donnée par J_Δ soit $\varepsilon_K = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2$.

  Avec toutes ces considérations on trouve directement que $\boxed{\dot{\theta}^2 = 3\frac{g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0)}$ (en dérivant, on obtient une autre équation différentielle bien connue).

- Encore un exemple intéressant: le rouleau de PQ à mécanisme de rappel.

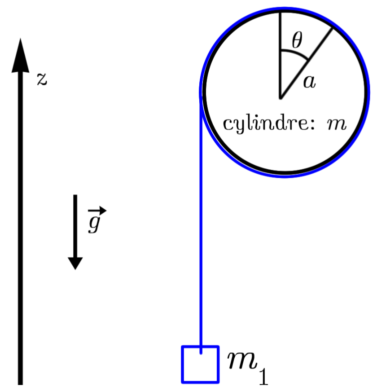

Figure 3: *Rouleau de PQ à mécanisme de rappel.*

Le problème est le suivant: *dans le WC de votre voisin, est installé un* ***dérouleur cylindrique plein*** *($J_\Delta = ma^2$) de PQ doté par un petit malin*[3] *d'un* ***mécanisme à ressort spiral de rappel****. On suppose que seule la dernière feuille de PQ ,* ***indécrochable*** *des précédentes, se comporte comme une masse m_1 et que le reste du PQ est sans masse.*

On voudrait savoir, lorsque l'on tente de tirer du papier, quelle est la période des oscillations libres de la dernière feuille, que l'on n'est pas parvenu à décrocher. Le couple de rappel élastique du ressort est C, le rouleau a à $t = 0$ la position initiale $\theta = \theta_0$.

L'étude cinématique donne, par un calcul qu'il serait bon de refaire en lisant ce poly:

$$\boxed{\ddot{\theta}\left[\left(\frac{3}{2}m + m_1\right)a^2\right] + C\left(\theta - \theta_0\right) = -mga}$$

soit

$$\boxed{\omega_0^2 = \frac{C}{a^2\left(\frac{3}{2}m + m_1\right)}}$$

On retiendra **quelques énergies potentielles classiques**:

- si $\overrightarrow{g}$ est uniforme, $\overrightarrow{e_z}$ vers le haut, alors le poids dérive de $\boxed{\varepsilon_p = mgz}$.
- Pour un ressort avec point d'attache fixe: $\boxed{\varepsilon_p = \frac{1}{2}k\left(l - l_0\right)^2}$
- Pour une force élastique d'interaction entre deux points (par exemple un ressort): $\boxed{\varepsilon_p = \frac{1}{2}k\left(l - l_0\right)^2}$
- Pour le champ newtonien créé entre deux particules chargées: $\boxed{\varepsilon_p = \sigma\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}}$ où $\sigma = \pm 1 \left(= \frac{q_1q_2}{|q_1q_2|}\right)$
- Pour un couple de torsion C (ex: torsion d'un fil tendu): $\boxed{\varepsilon_p = \frac{1}{2}C\left(\theta - \theta_0\right)^2}$

[3] ou un grand bennêt; dans les deux cas, ça fait chier le monde... Attention, vous allez pisser à côté.

VI Énergie potentielle et équilibre

Si le système considéré a n degrés de liberté, on donne son énergie potentielle $\varepsilon_p(x_1, ..., x_n)$ où les x_i sont des coordonnées au sens large (angle, abscisse, ...).

On lâche le système dans un état A sans mouvement ni vitesse initiale; plusieurs cas sont à envisager:

- si A correspond à un minimum d'énergie potentielle vis-à-vis de toutes ses coordonnées, il n'y aura pas de mouvement, le système est dans une position d'équilibre **stable**,
- si A est au voisinage d'un minimum d'énergie potentielle, alors il va s'en rapprocher,
- si A correspond à un maximum d'énergie potentielle, alors le système aura tendance à s'en éloigner au moindre mouvement, la position d'équilibre est **instable**,
- Si A est au voisinage d'un maximum d'énergie potentielle, il s'en écartera aussi.