

Électromagnétisme: éléments de détermination des grandeurs

Sommaire

I	Notion de charge et de courant	2
1)	Expression de la force électromagnétique	2
a)	Modèle discret	2
b)	Modèle continu volumique	2
c)	Relation entre la densité de courant et l'intensité	3
d)	Modèle continu surfacique, linéique	3
2)	Conservation de la charge	3
II	Symétries du champ électromagnétique	3
III	Vecteurs vrais et pseudo-vecteurs	4
IV	Équations de MAXWELL	4
1)	Les équations	4
2)	Conservation de la charge	5
3)	Quelques notes sur μ_0 et ε_0	5
V	Cas de l'électrostatique	5
1)	Propriétés fondamentales et loi de COULOMB	5
2)	Continuité ou discontinuité des champs électrique et magnétique	6
VI	Carte d'un champ électrostatique	6
1)	Dans une section d'un tube de champ	6
2)	Relation avec les potentiels	7
VII	Des exemples en pagaille	7
1)	Cas fondamentaux et combinaisons	7
2)	Détermination du champ \vec{E} dans un espace avec des électrodes de potentiels connus	7
3)	Détermination de la trajectoire d'une particule chargée soumise au champ électromagnétique	8

L'électromagnétisme abordé en spé, est essentiellement constitué de l'étude des champs \vec{E} et \vec{B} , respectivement champ électrique et magnétique.

On se placera principalement dans le cadre de l'électrostatique: les charges sont immobiles et les courants constants (on appelle aussi cela le régime permanent).

Ce fascicule contient des éléments de détermination des grandeurs électromagnétiques, mais aussi un paragraphe consacré aux symétries: en effet, bien souvent, les systèmes que l'on étudiera sont symétriques par rapport à un certain plan, une certaine droite, et l'expression de \vec{E} et \vec{B} s'en trouve facilitée.

I Notion de charge et de courant

1) Expression de la force électromagnétique

D'une façon générale, la force électromagnétique exercée sur un point M , chargé d'une charge q , navigant dans l'espace à la vitesse \vec{v} soumis à un champ (\vec{E}, \vec{B}) s'exprime:

$$\vec{F} = q \left[\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right]$$

Cette force est aussi appelée force de LORENTZ.

Un changement de référentiel galiléen provoque une variation sur les champs:

$$\begin{cases} \vec{E}_2 = \vec{E}_1 + \vec{v}_E \wedge \vec{B} \\ \vec{B}_2 = \vec{B}_1 = \vec{B} \end{cases}$$

où \vec{v}_E est la vitesse d'entraînement d'un référentiel sur l'autre.

a) Modèle discret

De la même façon qu'en mécanique, où les interactions étaient directement exprimables "point par point", on peut déduire une expression plus globale pour un système particulaire. On travaille sur des portions mésoscopiques du système (il est inintéressant de considérer une seule particule parmi un million, ou l'ensemble des particules à la fois, lorsque l'on veut étudier le comportement local d'un système).

Considérons un volume V contenant des particules chargées, où règne un champ $(\vec{E}(M_i), \vec{B}(M_i))$

Sur le système entier, on peut avoir la résultante $\vec{R} = \sum_{i \in V} q_i \left[\vec{E}(M_i) + \vec{v}_{M_i} \wedge \vec{B}(M_i) \right]$

Sur un élément mésoscopique de volume $d\tau$, on pose la charge $dq = \sum_{i \in d\tau} q_i$, l'élément de courant $d\vec{C} = \sum_{i \in d\tau} q_i \vec{v}_i$ et on peut légitimement considérer que les champs \vec{E} et \vec{B} sont uniformes (localement!). Alors:

$$d\vec{F} = \left(\sum_{d\tau} q_i \right) \vec{E} + \left(\sum_{d\tau} q_i \vec{v}_i \right) \wedge \vec{B}$$

Soit aussi $\boxed{d\vec{F} = dq \vec{E} + d\vec{C} \wedge \vec{B}}$.

b) Modèle continu volumique

Toujours dans un volume mésoscopique, un modèle continu remplace n particules distinctes par une densité volumique de charge ρ telle que: $dq = \rho d\tau$.

Si plusieurs espèces de particules chargées venaient à se présenter, nous n'aurions qu'à sommer les $n_i q_i d\tau$ (où q_i est la charge de l'espèce) pour obtenir dq et donc ρ .

Pour être cohérent, on introduit aussi une densité volumique de courant $\vec{j} = \sum_{\text{espèces}} n_i q_i \vec{v}_i$.

Dans le cas d'un fil chargé neutre, les ions ne bougent pas et on ne considèrera que les électrons: $\vec{j} = \rho_m d\tau$ où ρ_m est la densité volumique en charges mobiles (électrons).

Finalement: $\boxed{d\vec{F} = dq \vec{E} + \underbrace{\vec{j} \wedge \vec{B}}_{\text{force de LAPLACE}} d\tau}$.

c) Relation entre la densité de courant et l'intensité

En considérant une surface Σ que traverse une charge dQ pendant une durée dt , on a $I_\Sigma = \frac{dQ}{dt}$ (c'est du réchauffé de sup). Si le système se comporte bien très localement (tous les porteurs de charge ont même charge et même vecteur vitesse sur un volume infinitésimal), alors $dI = \vec{j} \cdot d\vec{S}$, soit en sommant:

$$\boxed{I_\Sigma} = \iint_\Sigma dI = \iint_\Sigma \vec{j}(M) \cdot d\vec{S} = \Phi_\Sigma(\vec{j})$$

d) Modèle continu surfacique, linéique

Ces modèles ne sont pas franchement différents du précédent. Ce ne sont que des cas dégénérés, sur lesquels on va remplacer les unités volumiques vues ci-dessus par celles du tableau suivant:

Modèle	Élément de charge	Élément de courant	Densité	Force
Volumique	$\sum_i q_i n_i = \rho d\tau$	$\vec{j} d\tau$	$\rho = \frac{dQ}{d\tau}$	$d\vec{F} = dq\vec{E} + \underbrace{\vec{j} \wedge \vec{B} d\tau}_{\text{force de LAPLACE}}$
Surfacique	σdS	$\vec{j}_s dS$	$\sigma = \frac{dQ}{dS}$	$d\vec{F} = (\sigma\vec{E} + \vec{j}_s \wedge \vec{B}) dS$
Linéique	λdl	$I d\vec{l}$	$\lambda = \frac{dQ}{dl}$	$d\vec{F} = \lambda\vec{E} dl + I d\vec{l} \wedge \vec{B}$
Particule isolée	q	$q\vec{V}$	sans objet	$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$

Table 1.1: Représentation des composantes de la force électromagnétique

2) Conservation de la charge

Pour un système ouvert : $\frac{dQ}{dt} = -\Phi_\Sigma(\vec{j}) \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0}$ (c'est une équation locale).

II Symétries du champ électromagnétique

Le principe fondamental qui régit ce paragraphe est le suivant:

Les symétries des causes se retrouvent dans les effets.

Pierre CURIE

Ce qui implique sur les champs électrique et magnétique, les résultats du tableau suivant (pour les preuves, faire un dessin, ça suffira amplement!):

Action subie par les sources	Effet sur \vec{E}	Effet sur \vec{B}
Symétrie par rapport à Π	$\vec{E}' = \text{sym } \vec{E}$	$\vec{B}' = -\text{sym } \vec{B}$
Antisymétrie par rapport à Π^*	$\vec{E}' = -\text{sym } \vec{E}$	$\vec{B}' = \text{sym } \vec{B}$
Translation	$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{OO}'$	$\vec{B}' = \vec{B} + \vec{OO}'$
Rotation d'un angle α	$\vec{E}' = \text{rot}_\alpha \vec{E}$	$\vec{B}' = \text{rot}_\alpha \vec{B}$

Table 1.2: Actions subies par les sources et leurs effets sur les champs

Il existe également des cas particuliers directement trouvables sur les sources, et ces cas sont d'ailleurs fréquents:

- les sources sont invariantes par symétrie plane; alors il en va de même pour \vec{E} et \vec{B} . Exemple: cas d'une sphère uniformément chargée et d'un plan la coupant diamétralement.

- les sources admettent un plan d'antisymétrie; alors ce plan est un plan d'antisymétrie pour \vec{E} et un plan de symétrie pour \vec{B} .
- les sources sont invariantes par une rotation, une translation; alors il en va de même pour \vec{E} et \vec{B} .

Sur un plan d'(anti)symétrie, on a:

	Π	Π^*
\vec{E}	$\vec{E} \in \Pi$	$\vec{E} \perp \Pi$
\vec{B}	$\vec{B} \perp \Pi$	$\vec{B} \in \Pi$

Table 1.3: Champs sur un plan de symétrie ou d'antisymétrie

Une dernière chose, bonne à noter: lorsque le champ \vec{E} est en régime permanent, les lignes de champ divergent des charges; lorsque le champ \vec{B} est en régime permanent, les lignes de champ s'enroulent autour des courants.

III Vecteurs vrais et pseudo-vecteurs

Un vecteur "vrai" (Polaire) correspond à une grandeur physique mesurable; un "pseudo-vecteur" (Axial) correspond à une grandeur physique non directement mesurable (usuellement issue du produit vectoriel, ou dépendant de la convention d'orientation choisie par l'espace; le premier impliquant le second puisque notre produit vectoriel de \mathcal{V}_3 est celui des droitiers).

On montre les règles de calcul suivantes:

- $P \wedge P = A$
- $\vec{\text{rot}} P = A$
- $P \wedge A = P$
- $\vec{\text{rot}} A = P$
- $A \wedge A = A$

IV Équations de Maxwell

1) Les équations

Les équations de MAXWELL, en tout régime, sont les suivantes:

$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	Maxwell-Faraday
$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	Maxwell-Ampère
$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	Maxwell-Gauss
$\text{div} \vec{B} = 0$	Maxwell relative au Flux

En régime permanent, elles deviennent:

$\vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}$
$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$
$\text{div} \vec{B} = 0$



Figure 1.1: Maxwell

Où l'on remarque notamment que les deux champs sont découplés.

2) Conservation de la charge

On vérifie que les équations de MAXWELL impliquent l'équation locale de conservation de la charge:

$$\begin{aligned} \text{div MA} &\Rightarrow \underbrace{\text{div rot } \vec{B}}_0 = \mu_0 \left[\text{div } \vec{j} + \underbrace{\varepsilon_0 \text{div } \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}_{\frac{\rho}{\varepsilon_0}} \right] \\ &\Leftrightarrow 0 = \text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \end{aligned}$$

Ouf!

3) Quelques notes sur μ_0 et ε_0

ε_0 est la permittivité du vide; on la mesure et elle vaut environ $10^{-11} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$.

μ_0 est la perméabilité (au sens magnétique) du vide. Elle est **strictement** égale à $4\pi 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ (on la pose ainsi!)

On a:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$$

où c est la vitesse de la lumière.

V Cas de l'électrostatique

1) Propriétés fondamentales et loi de Coulomb

Les propriétés suivantes sont vérifiées dans le cadre de l'électrostatique:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} = \vec{0} &\Rightarrow \exists V(M) / \vec{E} = -\text{grad}V \\ \text{div } \vec{E} = 0 &\Rightarrow \text{Théorème de Gauss : } \Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \iiint_V \text{div } \vec{E} \, d\tau = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint \rho \, d\tau = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \\ \text{div } \text{grad}V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} &\Rightarrow \boxed{\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}} \text{ équation de Poisson} \end{aligned}$$

On en déduit la loi de COULOMB: **en l'absence de charges à l'infini** (hypothèse importante):

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{E}_{space}} \frac{\rho(P) d\tau_P}{PM}$$

$$\vec{E}(M) = \overrightarrow{\text{grad}}_M V(M) = \dots = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{E}_{space}} \frac{dq e_{PM} \vec{e}_{PM}}{PM^2}$$

2) Continuité ou discontinuité des champs électrique et magnétique

Nous connaissons la continuité, qui dans un espace normé équivaut pour une application linéaire à être \mathcal{B} bornée sur la boule unité. Bon, ça c'est des maths. Alors si ρ et \vec{j} sont bornés, ce sera le cas de leurs dérivées par rapport à chacune des coordonnées x, y, z .

Alors vient le résultat: **\vec{E} et \vec{B} sont continus par rapport aux coordonnées dans l'espace sous réserve que ρ et \vec{j} soient bornés.**

Inversement, par exemple dans le cas d'une répartition surfacique, ρ n'est pas bornée, donc $\text{div} \vec{E}$ non plus, donc \vec{E} est discontinu.

Si $\|\vec{j}\| \rightarrow +\infty$, alors \vec{B} est discontinu.

Mais on peut faire mieux: évaluer la discontinuité!

Let's go! Prenons une surface chargée à laquelle nous ôtons un élément de surface dS (système (2)). Le reste est le système (1). Soit un point M dans la zone vide (donc sur le petit bout découpé), M_1 tendant vers M par-dessus, M_2 tendant vers M par-dessous.

- Dans le système (1), $\rho(M)$ est nul car M est hors la surface; par conséquent $\lim_{M_1 \rightarrow M} \vec{E}(M_1) = \lim_{M_2 \rightarrow M} \vec{E}(M_2) = \vec{E}(M)$.
- Dans le système (2), on a $\lim_{M_1 \rightarrow M} \vec{E}(M_1) - \lim_{M_2 \rightarrow M} \vec{E}(M_2) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{21}$
- Soit dans $(1) \cup (2)$ une discontinuité correspondant à $\boxed{\vec{E}_1 - \vec{E}_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{21}}$.

VI Carte d'un champ électrostatique

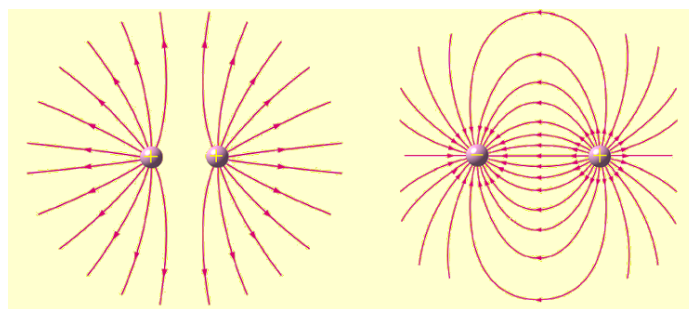


Figure 1.2: Cas usuel d'interaction charge/charge

Nous pouvons déduire quelques propriétés des lignes de champ dans un champ vide de charges; celles-ci sont détaillées ici.

1) Dans une section d'un tube de champ

Il faut retenir la proposition importante suivante:

Le flux de \vec{E} , à travers toutes les sections d'un même champ vide de charge, a la même valeur.

2) Relation avec les potentiels

La proposition précédente conduit, pour deux points A et B situés sur une ligne de champ, à dire que $V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$ qui ne peut pas être nul.

Par conséquent, **les lignes de champ ne peuvent pas être fermées** (imaginez le puits de potentiel en parcourant une même courbe sinon...).

Si le potentiel admet des extrema, ils répondent alors à la règle suivante:

$A \text{ max de potentiel} \Rightarrow \rho(A) > 0$ $A \text{ min de potentiel} \Rightarrow \rho(A) < 0$ $\rho(A) = 0 \Rightarrow A \neq \text{extremum}$
--

Dans le cas d'un **champ parallèle**, on déduit aisément (rotationnel nul) que celui-ci est **uniforme**.

VII Des exemples en pagaille

1) Cas fondamentaux et combinaisons

Les exemples qui suivent sont à retrouver en moins de 30 secondes.

Exemple 1. Champ créé par une charge ponctuelle; *surface de Gauss: aucune.*

Les symétries nous donnent $\vec{E} = E(r) \vec{e}_r$; Gauss nous donne $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$ en coord. sphériques.

Exemple 2. Fil infini chargé uniformément; *surface de Gauss: cylindre autour du fil.*

Les symétries nous donnent $\vec{E} = E(r) \vec{e}_r$ en coordonnées cylindriques, Gauss nous donne $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \vec{e}_r$

soit $V = \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{r_0}$.

Exemple 3. Plan infini uniformément chargé; *surface de Gauss: pavé vertical de forme quelconque, aux extrémités parallèles au plan, que le plan coupe en deux parties égales.*

Les symétries nous donnent $\vec{E} = E(z) \vec{e}_z$ où $E(z)$ est impaire. Gauss nous donne $\Phi_\Sigma(\vec{E}) = 2SE(z) = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$.

Exemple 4. Cas généré: une fine couche d'épaisseur e , infinie. L'axe des x se trouve au milieu de ce "gâteau".

Les symétries nous donnent $\vec{E}(M) = E(z) \vec{e}_z$ où $E(z)$ est impaire.

De plus on a $\text{div} \vec{E} = \frac{dE}{dz}$ donc dans le "gâteau" ($|z| < \frac{e}{2}$) on a $E'(z) = \rho$, 0 en dehors. La courbe de $E(z)$ est alors affine par morceaux: une constante $-k$ jusqu'à $-\frac{e}{2}$, une affine, puis k de $\frac{e}{2}$ à l'infini. En choisissant $V(0) = 0$ on obtient une parabole entre $-\frac{e}{2}$ et $\frac{e}{2}$ et deux affines de pente k pour le potentiel.

2) Détermination du champ \vec{E} dans un espace avec des électrodes de potentiels connus

Il est important de retenir que **dans un conducteur à l'équilibre électrostatique, le champ \vec{E} est nul.**

Alors, pour la route, un petit

Exercice 1. Soit une sphère de rayon R conductrice portée à un potentiel U par rapport à la masse, à l'aide d'un générateur. Calculez $\vec{E}(M)$.

Les symétries nous donnent (en coordonnées sphériques)
$$\begin{cases} \vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r \\ V(M) = V(r) \end{cases} \quad (\text{invariance en } \theta \text{ et } \varphi).$$

Ensuite: $\Delta V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2}{\partial r} \frac{\partial V}{\partial r} = 0$ pour $r > R$, soit $r^2 \frac{\partial V}{\partial r} = A = cte$ soit $\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{A}{r^2}$ donc $V = -\frac{A}{r} + B$ (et l'on trouve les constantes d'intégration à l'aide des deux conditions ci-dessus).

D'où $V(r) = U \frac{R}{r}$ et $\vec{E}(r) = U \frac{R}{r^2} \vec{e}_r$.

3) Détermination de la trajectoire d'une particule chargée soumise au champ électromagnétique

Exercice 2. Soit une particule chargée dans le vide, initialement à l'origine du repère cartésien de l'espace, dotée d'une vitesse $\vec{v} = v_0 \vec{e}_x$ soumise à un champ $\vec{E} = E \vec{e}_x$. Déterminez la nature de sa trajectoire.

Réponse: C'est une parabole. On détermine assez aisément ce genre de choses, en peu d'étapes.

- Première étape, le calcul de la force: $\vec{F} = q \vec{E} = qE \vec{e}_x$.
- Deuxième étape, l'intégration: c'est terminalesque... $x(t) = \frac{qE}{m} \frac{t^2}{2} + v_0 t$.

Exercice 3. Un peu plus compliqué: on remplace le champ \vec{E} par un champ $\vec{B} = B \vec{e}_x$.

Réponse: C'est un joli cercle. Quelques étapes du raisonnement:

- Première étape, le calcul de la force: $\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B} = q(-\dot{x} \vec{e}_y + \dot{y} \vec{e}_x)$
- Deuxième étape, on introduit $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto x(t) + iy(t)$, ce qui nous donne une jolie équation différentielle en $\frac{du}{dt}$: $\frac{d^2 u}{dt^2} + K \frac{du}{dt} = 0$ où K est à déterminer (à vot'charge m'ossieur!)
- On intègre cette fonction, ce qui nous donne $\frac{du}{dt}$, que l'on intègre à nouveau, et l'on a $x(t)$ et $y(t)$.

Petite remarque: si l'on ajoute une composante z à la vitesse initiale, on obtient une hélice...

Exercice 4. Une combinaison des deux?

Réponse: C'est une cycloïde. Le raisonnement est le même que ci-dessus; au lecteur de le reproduire.



Figure 1.3: Faut réfléchir à tout ça... Notez d'ailleurs bien l'équation de la parabole et tracez-la vous aussi.