Pour ceux que ça intéresse - Absolument hors programme

Le calcul des champs générés par un dipôle oscillant

Les formules résultantes ont été vues en cours, et même elles ne sont pas à retenir par cœur...

Déjà, quelques mots sur les potentiels retardés : les quatre équations de Maxwell nous fournissent les champs $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$, mais souvenez-vous, lorsque l'on a déterminé les champs à grande distance d'un dipôle électrostatique, on a raisonné sur les potentiels. Jusqu'à l'an dernier, on avait un potentiel à partir duquel on pouvait déduire $\overrightarrow{B}$, ce potentiel se nommait $\overrightarrow{A}$: c'était un "potentiel-vecteur", qui vérifiait la relation

$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{A}$$

Les champs $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ étant reliés, il en va donc ainsi de V et $\overrightarrow{A}$. On devait donc établir une condition de jauge, qui correspond en fait au choix des constantes (puisque, comme vous le savez, V est défini à constante près, et du coup $\overrightarrow{A}$, comme tout potentiel qui se respecte, est défini à *"constante pour le rotationnel"* près -i.e. un champ de vecteurs à flux conservatif). On choisissait une jauge appelée jauge de LORENTZ, qui stipulait :

$$\text{div}\,\overrightarrow{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

Ce n'est pas un hasard : on prenait, pour avoir l'ARQS, div $\overrightarrow{A} = 0$, et comme on avait $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V - \dfrac{\partial A}{\partial t}$ ce qui entraînait, avec MAXWELL-AMPÈRE, $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{A} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\text{div}\,\overrightarrow{A} - \Delta\overrightarrow{A}$, soit donc

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{A} = \mu_0\,\overrightarrow{j} + \frac{1}{c^2}\left[-\frac{\partial^2\overrightarrow{A}}{\partial t^2} - \overrightarrow{\text{grad}}\,\frac{\partial V}{\partial t}\right]$$

où l'on voulait alors annuler les $\overrightarrow{\text{grad}}\,\text{div}$ qui étaient particulièrement moches.

La jauge de LORENTZ laisse donc les termes suivants dans MAXWELL-AMPÈRE :

$$\Delta\overrightarrow{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overrightarrow{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\,\overrightarrow{j}$$

En injectant la jauge de Lorentz dans MAXWELL-GAUSS (div $\overrightarrow{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$), il venait, sachant que $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V - \dfrac{\partial\overrightarrow{A}}{\partial t}$,

$$\Delta V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Vous me direz, ça ressemble à des poissons et du D'ALEMBERT à la fois, ces équations (en prenant l'ARQS, négligeant la propagation, ou le vide, annulant $\overrightarrow{j}$ et ρ, on retrouve deux équations connues). Ce n'est pas non plus un hasard....

Les solutions de ces équations, qu'l'on ne résoudra pas (filez-les à Maple, Sage, Python ou qui vous voulez, mais ne vous faites pas mal à la tête), sont appelées **solutions à potentiels retardés** : elles seront fonction de $t - \frac{r}{c}$ (et de la position), où r est la distance au dipôle oscillant. Cette dépendance explique l'existence d'un retard, car quand une perturbation dans le milieu est créée (onde), elle n'arrive que "plus tard" à un point éloigné, ce "plus tard" correspondant au $-\frac{r}{c}$, puisque l'onde se propage à la vitesse $c = 3 \cdot 10^8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Maintenant, le calcul proprement dit :

On se place en coordonnées sphériques, comme sur le schéma de la figure 1.

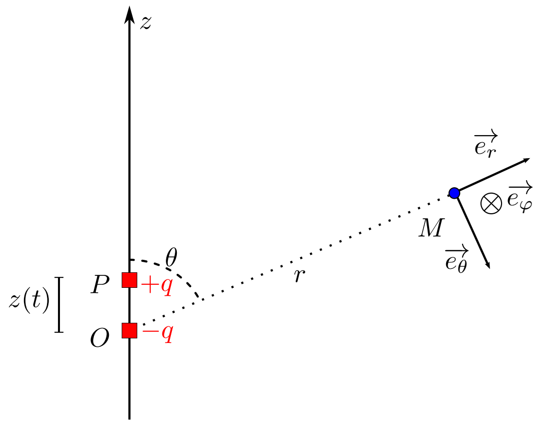

Figure 1 – Dipôle oscillant

La charge $-q$ est fixe, en O, alors que la charge $+q$ est mobile, ayant pour cote $z(t) = z_{max} \cos\left(2\pi \frac{t}{\tau}\right)$.

Les symétries nous indiquent que $\overrightarrow{B} = B(M,t)\,\overrightarrow{e_\varphi} = B(r,\theta)\,\overrightarrow{e_\varphi}$ (à position ou temps fixé). Par ailleurs, pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, sur l'axe Oz, on aura $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{0}$.

À grande distance, on comprend que localement, le champ électromagnétique présentant une symétrie sphérique a une structure d'OPPM (note [1]) : on en déduit $\overrightarrow{E} = cB(r,\theta)\,\overrightarrow{e_\theta}$, par la relation de structure du champ électromagnétique. On en déduit donc aisément le vecteur de Poynting. En résumé, on a, à grande distance :

$$\begin{cases} \overrightarrow{B} & = B(r,\theta)\,\overrightarrow{e_\varphi} \\ \overrightarrow{E} & = cB(r,\theta)\,\overrightarrow{e_\theta} \\ \overrightarrow{\Pi} & = \dfrac{E^2}{\mu_0 c}\overrightarrow{e_r} \end{cases}$$

Attaquons donc la détermination de $\overrightarrow{A}$, et c'est là qu'entre vraiment le hors-programme.

Pour le schéma de la figure 1, l'élément de courant associé au dipôle oscillant est $q\dot{z}\overrightarrow{e_z}$ (porté donc par l'axe Oz) (note [2]). On savait, de manière analogue à l'expression du potentiel pour un dipôle électrostatique, que

$$\overrightarrow{A}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\dot{z}\left(t - \frac{PM}{c}\right)}{PM}\overrightarrow{e_z}$$

On fera d'abord **l'approximation dipolaire**, qui consiste à dire que $|z| \ll r$ (grande distance), pour appliquer ce que l'on vient de voir, et dire que $\frac{1}{PM} \sim \frac{1}{r}$.

Maintenant, attention, on n'a pas forcément $\dot{z}\left(t - \frac{PM}{c}\right) \sim \dot{z}\left(t - \frac{r}{c}\right)$ **pour autant !** En effet, l'équivalence $PM \sim r$, peut malgré tout porter des termes cachés qui introduiraient une différence a priori minime sur $t - \frac{PM}{c}$, mais qui peut s'avérer grande compte tenu de la fréquence des oscillations pratiquées.

Pour avoir cela, il faut donc faire une approximation supplémentaire, dite **non relativiste**, qui consiste à dire que $z_{max} \ll \lambda$ (ou $z_{max} \ll c\tau$ où τ est la période des oscillations).

1. onde plane progressive monochromatique
2. pour ceux qui se demandent pourquoi pas $2q\dot{z}\overrightarrow{e_z}$ ou $\overrightarrow{0}$, la seule charge **mobile** ici est $+q$, or $\overrightarrow{j} = \sum_i n_i q_i \overrightarrow{v_i}$...

Avec ces deux approximations, on arrive à

$$\overrightarrow{A}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\dot{z}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}\overrightarrow{e_z}$$

En posant $\overrightarrow{A}(M,t) = f(r,t)\,\overrightarrow{e_z}$, on sait que $\operatorname{div} f(r,t)\,\overrightarrow{e_z} = \left(\overrightarrow{\operatorname{grad}} f\right)\cdot\overrightarrow{e_z} = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{e_r}\cdot\overrightarrow{e_z} = \frac{\partial f}{\partial r}\times\cos\theta$. On calcule donc, sachant que $\operatorname{div}\overrightarrow{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}$ (pour déterminer V) :

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\overrightarrow{A} &= \frac{\partial f}{\partial r}\times\cos\theta \\ &= \frac{\mu_0 q}{4\pi}\left[-\frac{\ddot{z}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{rc} - \frac{\dot{z}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r^2}\right]\cos\theta\end{aligned}$$

Il y a un terme en $1/r^2$ dont on voudrait bien se débarrasser ; on fait donc l'approximation dite de **zone de rayonnement**, qui veut que $r \gg \lambda$ (ce qui nous fait sortir de l'ARQS si l'on pensait y être). Il vient alors que, puisque $\ddot{z} \sim \frac{\dot{z}}{\tau}$ (à cause des cos), $\frac{\ddot{z}}{rc} \sim \frac{\dot{z}}{r\lambda} \gg \frac{z}{r^2}$. D'où :

$$\operatorname{div}\overrightarrow{A} = \frac{-\mu_0 q\ddot{z}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{4\pi rc}\cos\theta$$

ce qui est le mieux qu'on puisse faire avec cette approximation. Avec la jauge de Lorentz vue plus haut, on sait que $\operatorname{div}\overrightarrow{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}$; il nous vient donc les expressions des deux potentiels :

$$\boxed{\begin{cases} V &= \dfrac{-\mu_0 qc\dot{z}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{4\pi r}\cos\theta \\ \overrightarrow{A} &= \dfrac{\mu_0 q\dot{z}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{4\pi r}\overrightarrow{e_z}\end{cases}}$$

On détermine donc les champs $\overrightarrow{B}_0 = \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{E}_0 = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,V - \frac{\partial\overrightarrow{A}}{\partial t}$ **générés par la particule oscillante**, par des calculs fastidieux, mais sans introduction d'hypothèses, dont je vous épargnerai donc : $\overrightarrow{B}_0 = \frac{\mu_0 q\ddot{z}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{4\pi rc}\sin\theta\overrightarrow{e_\varphi}$, et $\overrightarrow{E}_0 = \frac{\mu_0 q\ddot{z}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{4\pi r}\sin\theta\overrightarrow{e_\theta}$.

On serait tenté de rajouter le champ créé à grande distance par la particule immobile $-q$ en O ($\overrightarrow{E}_{-q} = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{e_r}$), mais il s'agit d'un terme en $\frac{1}{r^2}$ que l'approximation de zone de rayonnement nous autorise à négliger (à grande distance, un champ en $\frac{1}{r^2}$ a une intensité bien moindre qu'un en $\frac{1}{r}$...) ; les expressions de $\overrightarrow{E}$ et de $\overrightarrow{B}$ demeureront donc inchangées, à un détail près : on a $qz(t) = p(t)$ (par définition du moment dipolaire), ce qui donne finalement :

$$\boxed{\begin{cases} \overrightarrow{B} &= \dfrac{\mu_0\ddot{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{4\pi rc}\sin\theta\overrightarrow{e_\varphi} \\ \overrightarrow{E} &= \dfrac{\mu_0\ddot{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{4\pi r}\sin\theta\overrightarrow{e_\theta}\end{cases}}$$

Pour votre culture personnelle, sachez qu'il n'était surtout pas demandé de retenir ça par cœur (mais plutôt la formule de Parseval, le théorème d'intégration terme à terme...), mais plutôt les quatre points qui suivent :

1. Les champs décroissent en $\frac{1}{r}$,
2. Les champs dépendent de $\ddot{p}$ (ou de l'accélération de la particule mobile à un facteur q près),
3. $\overrightarrow{E} \parallel \overrightarrow{e_\theta}$, $\overrightarrow{B} \parallel \overrightarrow{e_\varphi}$
4. $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ sont nuls dans la direction $\theta = 0$ ou π (c'est-à-dire sur l'axe Oz).

Voilà !