

Cas de base en électromagnétisme

Sommaire

I	Les équations de Maxwell ainsi que les théorèmes fondamentaux	1
II	Cas relatifs au champ \vec{E}	2
	1) Charge ponctuelle	2
	2) Fil infini	2
	3) Plan infini	2
	4) Couche de charge	2
	5) Davantage de cas en exercice	3
III	Cas relatifs au champ \vec{B}	3
	1) Fil infini	3
	2) Distribution plane	3
	3) Spire circulaire	4
	4) Solénoïde infini	4
	5) Davantage de cas en exercice	4
IV	Condensateurs	4
	1) Calcul de la capacité	4
	2) Différents cas de condensateurs envisageables	5
	3) Cas en exercice	5
V	Force de Laplace, force de Lorentz	5
VI	Dipôle électrique, dipôle magnétique	5

Les quelques cas que traite ce fascicule sont à connaître absolument, puisque toutes les situations au programme s'y ramènent.

I Les équations de Maxwell ainsi que les théorèmes fondamentaux

Les équations de Maxwell sont au nombre de quatre, et ce sont celles qui suivent:

- $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
- $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
- $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \left[\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right]$
- $\text{div} \vec{B} = 0$

Ces équations donnent les théorèmes qui suivent:

Le théorème de Gauss: $\Phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$ où Σ est une surface fermée, Q_{int} est la charge qu'il renferme.

Le théorème d'Ampère: $\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\Sigma}$ où Γ est une courbe fermée, Σ une surface délimitée par Γ , $I_{\Sigma} = \Phi_{\Sigma}(\vec{j})$ (c'est une intensité enlacée, en quelques sortes).

La loi de Biot et Savart: $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{E}_{space}} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{e}_{PM}}{PM^2}$

La loi de Coulomb: $\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{E}_{space}} \frac{dq \vec{e}_{PM}}{PM^2}$

Les équations de Poisson:

- Poisson électrostatique: $\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$
- Poisson potentiel-vecteur: $\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$

II Cas relatifs au champ \vec{E}

1) Charge ponctuelle

Charge placée en un point quelconque de l'espace.

Symétries du problème: $\vec{E} = E(r) \vec{e}_r$ (sphériques)

Surface de Gauss: boule de rayon r centrée sur la charge

Équation obtenue: $4\pi r^2 E(r) = \frac{1}{\epsilon_0}$ soit $\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$

2) Fil infini

Fil infini aux deux extrémités, chargé uniformément (densité linéique λ).

Symétries du problème: $\vec{E} = E(r) \vec{e}_r$ (cylindriques d'axe le fil)

Surface de Gauss: Cylindre de hauteur h quelconque

Équation obtenue: $2\pi r h E(r) = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$ soit $\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r$

3) Plan infini

Plan infini uniformément chargé (densité surfacique σ).

Symétries du problème: $\vec{E} = E(z) \vec{e}_z$ (cartésiennes)

Surface de Gauss: Pavé de dimensions $l \times L \times h$ coupé au milieu de sa hauteur par le plan chargé

Équation obtenue: $2E(z)S = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$ soit $\vec{E}(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z$ (**remarque:** un plan infini est vu comme étant infini, peu importe la distance à laquelle on se trouve...)

4) Couche de charge

Couche infinie d'épaisseur e , chargée uniformément en volume (densité volumique ρ).

Symétries du problème: $\vec{E} = E(z) \vec{e}_z$ (cartésiennes) (tout plan contenant le point M où le champ est à déterminer ainsi que \vec{e}_z est plan de symétrie, de plus E est impaire)

Équation obtenue: $\vec{E}(z) = \begin{cases} \frac{\rho z}{\epsilon_0} \vec{e}_z & \text{si } |z| < \frac{e}{2} \\ \frac{z}{|z|} \frac{\rho e}{2\epsilon_0} \vec{e}_z & \text{si } |z| > \frac{e}{2} \end{cases}$

Proof. Dans la couche de charge: $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ et $\text{div } \vec{E} = \frac{dE}{dz}$ d'où $E(z) = \frac{\rho z}{\varepsilon_0} + \underbrace{cte}_0$.

Hors la couche de charge: $\text{div } \vec{E} = 0$ d'où $E(z) = cte = +\frac{\rho e}{2\varepsilon_0}$ sur l'intervalle $\left[\frac{e}{2}; +\infty\right]$ et $E(z) = -\frac{\rho e}{2\varepsilon_0}$ sur l'intervalle $\left]-\infty; -\frac{e}{2}\right]$ (solution de continuité), d'où l'équation. \square

5) Davantage de cas en exercice

Exercice 1. Soit un ensemble de fils parallèles, verticaux, équidistants (de $a > 0$) et infinis, tous contenus dans le même plan ($x = 0$).

- Déterminer la valeur σ de la densité surfacique de charge que l'on attribuerait à cet ensemble de fils vus de loin (répartition continue).
- On ne fait plus l'hypothèse de la répartition continue; pour un point situé face à un des fils, quel est le champ $\vec{E}(M)$?

Proof. L'exercice se traite ainsi:

- Il suffit de considérer un rectangle contenant n fils, de hauteur h et de largeur $l = na$ qui contient la charge $n\lambda h = \sigma nah$ d'où $\sigma = \frac{\lambda}{a}$. On peut alors appliquer le modèle surfacique vu plus haut.
- Le plan $x = 0$ est un plan de symétrie pour les charges donc un plan d'antisymétrie pour \vec{E} , donc $\vec{E} = E(M) \vec{e}_y$ où $E(M) = E(x, y)$ (invariance par translation en z). De plus, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, les fils numéro p et $-p$ créent en M des champs dont les composantes suivant x s'opposent, et dont les composantes y valent $E_{py} = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0 r_p} \sin(\vec{MP}, \vec{OP})$ (P étant la position du fil p) soit $E_{py} = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0 r_p} \frac{y}{r_p}$. On a aussi $r_p = \sqrt{a^2 p^2 + y^2}$

Il n'y a plus qu'à tous les sommer: $E(M) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda}{2\varepsilon_0 r_p} \frac{y}{r_p} = \frac{\lambda y}{2\varepsilon_0} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r_p^2}$. La convergence de la série est laissée à l'appréciation du matheux le plus proche (comparaison à la série de Riemann...)

\square

III Cas relatifs au champ \vec{B}

1) Fil infini

Fil infini aux deux extrémités, parcouru par un courant d'intensité i

Symétries du problème: $\vec{B} = B(r) \vec{e}_\theta$ (cylindriques d'axe le fil)

Contour d'Ampère: Cercle de rayon r

Équation obtenue: $2\pi r B(r) = \mu_0 i$ soit $\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{e}_\theta$

2) Distribution plane

Distribution de courants plane infinie, dont \vec{j}_s est uniforme (et contenu dans le plan).

Symétries du problème: $B(z)$ (cartésiennes où $Ox, Oy \in$ le plan, $Oz \perp$ le plan)

Contour d'Ampère: Rectangle de dimensions $l \times L$ traversé en sa demi-hauteur par le plan chargé

Équation obtenue: $2B(z) = \mu_0 j_s$ soit $\vec{B}(r) = \frac{|z| \mu_0 \vec{j}_s}{2} \wedge \vec{e}_z$

3) Spire circulaire

Spire parcourue par un courant d'intensité i uniforme

Symétries du problème: $\vec{B} = B(z) \vec{e}_z$ (cylindriques d'axe perpendiculaire au centre de la spire)

Contour d'Ampère: Aucun (on appliquera Biot/Savart)

Équation obtenue: $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 i}{2a} \sin^3 \alpha \vec{e}_z$

$$\text{Proof. } \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{\text{spire}} \frac{d\vec{l} \wedge \overrightarrow{e_{PM}}}{PM^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{\text{spire}} \frac{dl \sin \alpha}{a^2} \sin \alpha \vec{e}_z = \frac{\mu_0 i \sin^3 \alpha}{4\pi a^3} 2\pi a \vec{e}_z \text{ soit } \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 i}{2\pi a^2} \sin^3 \alpha \vec{e}_z$$

sur l'axe. □

4) Solénoïde infini

Solénoïde à section quelconque parcouru par un courant d'intensité i à spires jointives.

Symétries du problème: $\vec{B} = B(x, y) \vec{e}_z$ (Oz axe du solénoïde)

Contour d'Ampère: Rectangles de dimensions $l_i \times L$, l'un traversé en sa demi-hauteur par le solénoïde, l'autre uniquement hors solénoïde.

Équation obtenue: $\vec{B}(M) = \mu_0 n i \vec{e}_z$ à l'intérieur.

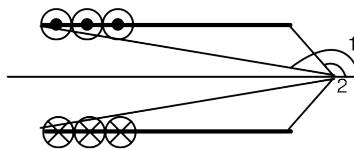
$$\text{Proof. Hors le solénoïde: } \int_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(M) L + 0 + 0 + 0 = \mu_0 I_{\text{enlacé}} = 0 \text{ soit } B(M) = 0.$$

Dans le solénoïde: $\int_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(M) L = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$ où $I_{\text{enlacé}} = niL$ où n est le nombre de spires par unité de longueur. □

5) Davantage de cas en exercice

Exercice 2. Déterminer le champ \vec{B} dans un solénoïde fini à spires circulaires, parcouru par un courant d'intensité I , pour un point M sur son axe de symétrie. On pourra calculer pour cela l'intensité dI d'un courant parcourant une spire élémentaire, puis en déduire $d\vec{B}$.

Proof. Un schéma s'impose avant tout:



Le repère est l'axe Oz (axe du solénoïde) orienté vers la droite.

Une spire élémentaire d'épaisseur dz voit traverser un courant $dI = \frac{NI dz}{L} = ndzI (= j_s dz)$; le champ élémentaire $d\vec{B}$ créé en M (distance a , angle θ) est $d\vec{B} = \frac{\mu_0 dI}{2a} \sin^3 \theta \vec{e}_z = \frac{\mu_0 n dz I}{2a} \sin^3 \theta \vec{e}_z$.

De plus $dz = -\frac{a d\theta}{\sin^2 \theta}$ soit $d\vec{B} = \frac{\mu_0 n I}{2} (-\sin \theta d\theta) \vec{e}_z$. Les angles limites étant θ_1 et θ_2 (notés 1 et 2 ci-dessus),

on en déduit $\vec{B} = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) \vec{e}_z$. □

IV Condensateurs

1) Calcul de la capacité

En règle générale: étant donnés $Q = \sigma S = \rho V = \dots$ et $U = V_1 - V_0$ où $V(M) = A \ln \frac{r}{r_0}$ en général (vide et espacement constant entre les deux armatures): on a $Q = CU$ donc $C = \frac{Q}{U}$.

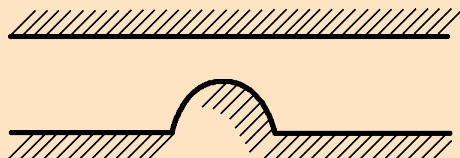
2) Différents cas de condensateurs envisageables

Les deux cas principaux sont:

- le condensateur plan (fini ou infini), cas simple où \vec{E} est uniforme (en général), et l'on devine aisément V
- le condensateur cylindrique (cas typique âme+blindage): c'est la même chose que précédemment mais en enroulé.

3) Cas en exercice

Exercice 3. Soit un condensateur plan, d'épaisseur e , sauf en une sphère, de rayon a , comme sur le schéma qui suit:



On considère que le champ généré par l'armature du haut est uniforme à grande distance de la bosse.

1. Déterminer la fonction potentiel V dans le condensateur, puis sur la bosse.
2. Déterminer la densité surfacique de charge σ sur l'armature du bas.
3. En déduire la charge portée par la sphère. Comparer à un dipôle en équilibre électrostatique qui serait placé à cet endroit.

Exercice 4. Soit un câble coaxial composé d'une âme en cuivre ($\epsilon_r \approx 2$, \varnothing 0,2 mm), d'un diélectrique supposé parfait (\varnothing 2,0 mm), et d'un blindage en cuivre tressé; le câble a une longueur de 10 mètres.

1. Déterminer la capacité de ce câble.
2. On souhaite utiliser ce câble pour transporter des signaux de fréquence $f \approx 482$ MHz. Déterminer l'impédance de ce câble pour cette gamme de fréquences; pensez-vous qu'un signal de faible amplitude sera déformé sur cette longueur de câble?

V Force de Laplace, force de Lorentz

Ce sont des forces liées à la présence des champs \vec{E} et \vec{B} .

La force de Lorentz est la force exercée par des champs \vec{B} et \vec{E} sur une particule de charge q voyageant à la vitesse \vec{v} : $\vec{F} = q [\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}]$.

La force de Laplace en est la composante $\vec{v} \wedge \vec{B}$.

VI Dipôle électrique, dipôle magnétique

Le tableau suivant compile les propriétés à retenir absolument et à savoir retrouver en moins de 30 secondes, même malgré une migraine un lendemain de fête bien arrosée.

	Dipôle électrique	Dipôle magnétique
Champ résiduel (\mathbf{DL}_1)	$\vec{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} [2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta]$	$\vec{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} [2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta]$
Moment	$\vec{p} = \sum q_i \vec{OP}_i$ (dipolaire)	$\vec{m} = i \vec{S}$ (magnétique)
Unité repère	$\frac{1}{\epsilon_0}$	$\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$