Une boîte à outils de mécanique en spé.

Sommaire

Ce fascicule compile le *minimum syndical* à savoir en classe de spéciale MP/MP* dans le cadre des chapitres de mécanique "classique", sans les démonstrations afférentes. La matière de ce fascicule est dans le cours de M. Marc Ménétrier, professeur de Physique/Chimie en MP* au lycée Thiers à Marseille.

I Des acquis de sup

1) En cinématique

Sont considérées acquises, et élémentaires, les relations de **composition de vitesse et d'accélération**: soient $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}'$ des référentiels, d'origines respectives O et O'. Soit également A un point quelconque. On a:

$$\boxed{\overrightarrow{v_{\mathcal{R}'}(A)} = \overrightarrow{v_{\mathcal{R}}(A)} + \overrightarrow{v_{\mathcal{R}'}(O)}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{a_{\mathcal{R}'}(A)} = \overrightarrow{a_{\mathcal{R}}(A)} + \overrightarrow{a_{\mathcal{R}'}(O)} + 2\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}/\mathcal{R}'}} \wedge \overrightarrow{v_{\mathcal{R}}(A)}}$$

Sont considérées acquises les relations de **changement de référentiel**, telles que la relation entre les dérivées d'une grandeur vectorielle $\overrightarrow{U}$:

$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{U}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{U}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} + \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}/\mathcal{R}'}} \wedge \overrightarrow{U}}$$

La relation de **composition des rotations**:

$$\boxed{\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}/\mathcal{R}'}} = \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_1}} + \overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}'}}}$$

Est également considérée acquise la **relation de Varignon**, qui pour un solide quelconque vu d'un référentiel fixe, donne:

$$\boxed{\overrightarrow{v_{\mathcal{R}}(B)} = \overrightarrow{v_{\mathcal{R}}(A)} + \overrightarrow{\Omega_{Solide/Rep\grave{e}re}} \wedge \overrightarrow{AB}}$$

On rappelle à toutes fins utiles la relation de la **dérivation par rapport au temps d'un vecteur fixe par rapport à un solide**:

$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{U}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{\Omega_{Solide/Rep\grave{e}re}} \wedge \overrightarrow{U}}$$

Enfin, les relations de **vitesse et d'accélération en coordonnées cylindriques** sont également considérées acquises et valent:

$$\boxed{\overrightarrow{v} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{e_z}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{e_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\overrightarrow{e_\theta} + \ddot{z}\overrightarrow{e_z}}$$

2) En mécanique

Sont considérés acquis les principaux points de mécanique de sup, en particulier tout ce qui touche aux **systèmes d'un point matériel, de deux points matériels**, aux **interactions en** $\frac{1}{r^2}$ et au **point matériel fictif** (réduction du problème de deux points à un point). On renvoie au cours de sup pour les différentes définitions et les principes.

II Des torseurs

1) Généralités

On définit le[1] torseur associé à un champ vectoriel $\overrightarrow{u}$, par l'objet mathématique qui suit (modèle **discret**):

$$\begin{cases} \overrightarrow{R} = \sum_{i\in\mathcal{S}} \overrightarrow{u_i} & \text{résultante cinématique} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_O} = \sum_{i\in\mathcal{S}} \overrightarrow{OM_i} \wedge \overrightarrow{u_i} & \text{moment en } O \end{cases}$$

On peut également définir le torseur en modèle **continu**, en remplaçant le $\sum$ par $\int, \iint, \iiint$ suivant les cas,

[1]sous réserve d'existence, celui-ci est unique par construction

et les $\overrightarrow{u_i}$ par des $\overrightarrow{u(M)}\mathrm{d}X$, X étant une longueur, une surface ou un volume.

Pour deux points A et B soumis au même champ $\overrightarrow{u}$, une relation existe entre les moments:

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}_A} = \overrightarrow{\mathcal{M}_B} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{R}}$$

a) Quelques torseurs particuliers

Un **couple** est un torseur de résultante nulle, ce qui rend $\overrightarrow{\mathcal{M}} = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}$ indépendant du point O.

Un **glisseur** est un torseur tel qu'il existe un point A de moment nul. Si $\overrightarrow{R}$ est la résultante du champ $\overrightarrow{u}$, alors il existe un axe de moment constant nul: il s'agit de l'axe Δ passant par A et parallèle à $\overrightarrow{R}$. Du coup, le moment en un point B s'exprime $\overrightarrow{\mathcal{M}_B} = \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R}$.

2) Torseur cinétique

Il s'agit du torseur associé au champ des **quantités de mouvement**: soit $\mathcal{R}$ un référentiel, dans lequel se trouve un solide $\mathcal{S}$ constitué de particules de masses m_i et affublées de vitesses $\overrightarrow{v_{\mathcal{R}}i}$; le torseur associé est

$$\boxed{\begin{cases} \overrightarrow{P_{\mathcal{R}}(\mathcal{S})} = \sum_{i\in\mathcal{S}} m_i \overrightarrow{v_{\mathcal{R}}i} \\ \overrightarrow{\mathcal{L}_O(\mathcal{S})} = \sum_{i\in\mathcal{S}} \overrightarrow{OM_i} \wedge m_i \overrightarrow{v_{\mathcal{R}}i} \end{cases}}$$

En modèle **continu**, on remplacera les masses m_i par des éléments de masse $\rho(M)\mathrm{d}\tau$ (en effet, on préfèrera exprimer la masse volumique en un point quelconque et la multiplier par un volume élémentaire, plus pratique à intégrer).

3) Torseur dynamique

Il s'agit du torseur associé au champ des **quantités d'accélération**: soit $\mathcal{R}$ un référentiel, dans lequel se trouve un solide constitué de particules de masses m_i et affublées d'accélérations $\overrightarrow{a_{\mathcal{R}}i}$; le torseur associé est

$$\boxed{\begin{cases} \overrightarrow{S_{\mathcal{R}}(\mathcal{S})} = \sum_{i\in\mathcal{S}} m_i \overrightarrow{a_{\mathcal{R}}i} \\ \overrightarrow{\mathcal{D}_O(\mathcal{S})} = \sum_{i\in\mathcal{S}} \overrightarrow{OM_i} \wedge m_i \overrightarrow{a_{\mathcal{R}}i} \end{cases}}$$

En modèle **continu**, on remplacera les masses m_i par des éléments de masse $\rho(M)\mathrm{d}\tau$ (en effet, on préfèrera exprimer la masse volumique en un point quelconque et la multiplier par un volume élémentaire, plus pratique à intégrer).

III Éléments cinétiques d'un système matériel

1) Des éléments cinétiques

Le torseur cinétique est introduit plus haut. Il existe une relation, presque évidente, entre la quantité de mouvement du barycentre G et la résultante cinétique:

$$\boxed{\overrightarrow{P_{\mathcal{R}}(\mathcal{S})} = m\overrightarrow{v_{\mathcal{R}}(G)}}$$

a) Théorème de Koenig[2] relatif au moment cinétique

On notera d'abord que dans le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$, le torseur cinétique est un couple.

Le **moment cinétique barycentrique**, dans le référentiel éponyme, est indépendant du point de recherche: $\overrightarrow{\mathcal{L}_{O_{\mathcal{R}^*}}(\mathcal{S})} = \overrightarrow{\mathcal{L}_{A_{\mathcal{R}^*}}(\mathcal{S})} = \overrightarrow{\mathcal{L}^*(\mathcal{S})}$.

On peut ainsi écrire l'égalité:

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{L}^*(\mathcal{S})} = \overrightarrow{\mathcal{L}_{O\ \text{quelconque}_{\mathcal{R}^*}}(\mathcal{S})} = \overrightarrow{\mathcal{L}_{G_{\mathcal{R}}}(\mathcal{S})}}$$

Le **théorème de Koenig** s'écrit ainsi, en utilisant la relation du torseur:

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{L}_{O_{\mathcal{R}}}(\mathcal{S})} = \overrightarrow{OG} \wedge m\overrightarrow{v_{\mathcal{R}}(G)} + \overrightarrow{\mathcal{L}^*(\mathcal{S})}}$$

b) Lorsque le solide est en rotation par rapport à un axe fixe

Si le solide est en rotation par rapport à l'axe Δ portant $\overrightarrow{e_z}$, alors $\overrightarrow{\Omega_{\mathcal{R}}(S)} = \omega\overrightarrow{e_z}$, $\overrightarrow{v_{\mathcal{R}}(M)} = \omega r\overrightarrow{e_\theta}$. Δ est appelé **axe principal d'inertie**.

On pose alors le **moment d'inertie par rapport à** Δ:

$$\boxed{J_\Delta = \sum_i m_i r_i^2}$$

Ainsi:

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{L}_{O_{\mathcal{R}}}(S)} = \underbrace{-\omega\sum_i m_i z_i r_i \overrightarrow{e_r}_i}_{\overrightarrow{\mathcal{L}_{\Delta_\perp}}} + \underbrace{\omega\overrightarrow{e_z}\sum_i m_i r_i^2}_{J_\Delta\overrightarrow{\Omega}}}$$

Il faut savoir que $\overrightarrow{\mathcal{L}_{\Delta_\perp}}$ **s'annule** lorsque le plan orthogonal à Δ passant par $O \in \Delta$ est un plan de symétrie, y compris donc pour les solides *plats*; il s'annule également lorsque Δ est un axe de symétrie pour $\mathcal{S}$.

On pose le moment cinétique par rapport à l'axe de rotation Δ:

$$\boxed{\mathcal{L}_\Delta = \overrightarrow{\mathcal{L}_{O\in\Delta}} \cdot \overrightarrow{e_x}}$$

[2] On dira directement Koenig lorsque nécessaire

c) Lorsque le solide est en rotation quelconque

Si le solide est en **rotation quelconque** ou en cas de difficultés avec $\overrightarrow{\mathcal{L}_{\Delta_\perp}}$, on peut écrire $\overrightarrow{\mathcal{L}_O}$ sous forme matricielle puisque $\overrightarrow{\Omega}$ est en relation linéaire avec $\overrightarrow{\mathcal{L}_O}$:

$$\exists \mathcal{B} \text{ base}/ \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{O_X} \\ \mathcal{L}_{O_Y} \\ \mathcal{L}_{O_Z} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \underbrace{\begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix}}_{M \in \mathbf{GL}_3(\mathbb{R})} \begin{pmatrix} \Omega_X \\ \Omega_Y \\ \Omega_Z \end{pmatrix}$$

*Si l'on trouve M, on peut en déduire, par exemple dans le cadre d'une rotation sur l'axe Ox: $\overrightarrow{\mathcal{L}_O} = J_1 \Omega_x \overrightarrow{e_x}$. Dans tous les cas, il existe 3 axes orthogonaux tels que $\overrightarrow{\mathcal{L}_\Delta} = J_\Delta \overrightarrow{\Omega}$, appelés **axes principaux d'inertie**.*

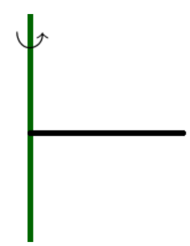
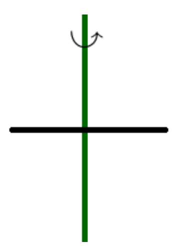
d) Cas d'un mouvement absolument quelconque

On ne peut pas préciser grand-chose, si ce n'est ce que le théorème de Koenig donne:

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{L}_{O_\mathcal{R}}(\mathcal{S})} = m\overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{v_\mathcal{R}(G)} + \overrightarrow{\mathcal{L}^*(\mathcal{S})}}$$

Éventuellement, on précisera que $\overrightarrow{\mathcal{L}^*(\mathcal{S})} = J_\Delta \overrightarrow{\Omega}$ lorsque l'axe de rotation Δ (s'il existe) dans $\mathcal{R}^*$ est l'axe d'inertie principal du système.

e) Quelques moments d'inertie usuels

- **Cerceau**: $J_\Delta = ma^2$ où a est le rayon du cerceau
- **Tige homogène**: l est la longueur de la tige
  - $J_\Delta = \dfrac{ml^2}{3}$ si Δ est à l'une des extrémités de la tige comme sur ce schéma: 
  - $J_\Delta = \dfrac{ml^2}{12}$ si Δ coupe le milieu de la tige: 
- **Disque plein homogène** de rayon a: $J_\Delta = \dfrac{ma^2}{2}$
- **Boule pleine homogène**: $J_\Delta = \dfrac{2}{5}ma^2$

2) Des éléments dynamiques

Le torseur dynamique est introduit plus haut. Dans le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$, la résultante dynamique est nulle; dans $\mathcal{R}$, elle peut s'écrire:

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{S}_R} = m\overrightarrow{a_{\mathcal{R}}(G)} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{P^*}}{\mathrm{d}t}_{\mathcal{R}}}$$

En le considérant, on définit le **moment dynamique barycentrique** ainsi:

$$\boxed{\forall O, \overrightarrow{\mathcal{D}*(\mathcal{S})} = \sum_i \overrightarrow{OM_i} \wedge m_i\overrightarrow{a_{\mathcal{R}^*}(M_i)} = \overrightarrow{\mathcal{D}_{G_{\mathcal{R}}}(\mathcal{S})}}$$

Les deux relations ci-dessus s'écrivent bien entendu en modèle continu avec des $\displaystyle\int$, en remplaçant les termes indexés sur i par les termes adéquats du modèle continu.

a) Théorème de Koenig relatif au moment dynamique

De la même façon que pour le moment cinétique, on obtient le **théorème de Koenig relatif au moment dynamique**:

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{D}_{O_{\mathcal{R}}}(\mathcal{S})} = \overrightarrow{\mathcal{D}_{G_{\mathcal{R}}}(\mathcal{S})} + \overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{\mathcal{S}_{\mathcal{R}}(\mathcal{S})}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{D}_{G_{\mathcal{R}}}(\mathcal{S})} = \overrightarrow{\mathcal{D}^*(\mathcal{S})} + m\overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{a_{\mathcal{R}}(\mathcal{S})}}$$

La deuxième formule est relative au moment dynamique du barycentre lui-même, la première à un point O.

b) Relation entre moment dynamique et moment cinétique

Cette relation paraît naturelle mais est restreinte. Elle s'exprime ainsi, si O est un point de l'espace:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathcal{L}_O}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{D_O} \text{ si } \begin{cases} O \text{ fixe} \\ \text{ou} \\ O = G \\ \text{ou} \\ \overrightarrow{v(O)} \parallel \overrightarrow{v(G)} \end{cases}}$$

3) De l'énergie cinétique

L'objet de ce paragraphe est essentiellement de se sortir de la tête que $E_c = \frac{1}{2}mv^2$. Cette relation n'est en effet valable que pour un système constitué d'un seul point matériel!

L'**énergie cinétique** E_K pour un système $\mathcal{S}$ dans un référentiel $\mathcal{R}$ se définit ainsi:

$$\boxed{E_{K_{\mathcal{R}}}(\mathcal{S}) = \frac{1}{2}\sum_i m_i v^2_{\mathcal{R}}(M_i) = \frac{1}{2}\iiint v^2(M)\mathrm{d}m}$$

Ici, la variable du modèle continu est l'élément de masse remplaçable par $\rho(M)\mathrm{d}\tau$.

a) Théorème de Koenig relatif à l'énergie cinétique

Le théorème de Koenig relatif à l'énergie cinétique s'écrit ainsi:

$$\boxed{E_{K_{\mathcal{R}}}(\mathcal{S}) = \frac{1}{2}mv_{\mathcal{R}}^2(G) + E_K^*}$$

b) Cas d'un solide en rotation par rapport à un axe fixe

Nous avons déjà étudié ce cas plus haut; en outre, l'énergie cinétique du même système sous les mêmes hypothèses s'écrit:

$$\boxed{E_K = \frac{1}{2}J_\Delta\omega^2 = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathcal{L}_O(\mathcal{S})} \cdot \overrightarrow{\Omega}}$$

c) Quelques cas usuels

- **Cylindre homogène plein**: $E_K = \dfrac{3}{4}mv^2$
- **Cerceau**: $E_K = mv^2$
- **Bille pleine homogène**: $E_K = \dfrac{7}{10}mv^2$

IV De la dynamique des systèmes

1) Principe fondamental de la dynamique

Le Principe Fondamental de la Dynamique[3] s'énonce ainsi: *"Il existe un référentiel appelé référentiel galiléen dans lequel le torseur des actions extérieures est égal au torseur dynamique du système"*.

Le **torseur des actions extérieures** correspond au torseur suivant:

$$\boxed{\begin{cases} \overrightarrow{R_{\varepsilon\to\mathcal{S}}} = \displaystyle\sum_{i\in\mathcal{S}} \overrightarrow{F_{\varepsilon\to M_i}} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{O_{\varepsilon\to\mathcal{S}}}} = \displaystyle\sum_{i\in\mathcal{S}} \overrightarrow{OM_i} \wedge \overrightarrow{F_{\varepsilon\to M_i}} \end{cases}}$$

Dans le référentiel $\mathcal{R}_G$ galiléen, ce torseur devient:

$$\boxed{\begin{cases} \overrightarrow{R_{\varepsilon\to\mathcal{S}}} = m\overrightarrow{a(G)} \\ \overrightarrow{\mathcal{D}_{O_{\mathcal{R}_G}}(\mathcal{S})} = \overrightarrow{\mathcal{M}_{O_{\varepsilon\to\mathcal{S}}}} \end{cases}}$$

a) Loi d'inertie et référentiels galiléens

Dans le cas d'un système **isolé** ou **pseudo-isolé**[4], dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}_G$ on a:

$$\boxed{\begin{cases} \overrightarrow{a_{\mathcal{R}_G}(G)} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \overrightarrow{v_{\mathcal{R}_G}(G)} = \overrightarrow{\text{const}} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_G} = \left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathcal{L}^*(\mathcal{S})}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_G} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \overrightarrow{\mathcal{L}^*(\mathcal{S})} = \overrightarrow{\text{const}} \end{cases}}$$

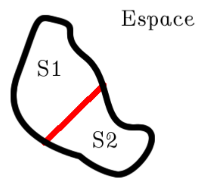
[3] ci-après, PFD

[4] lorsque la résultante des forces dans $\mathcal{R}_G$ est nulle, le système est dit *pseudo-isolé*

De plus, si $\mathcal{R}_1$ est galiléen, alors **est galiléen tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à** $\mathcal{R}_1$. Les forces extérieures s'appliquant au système sont indépendantes du référentiel galiléen.

b) Loi des actions réciproques

Considérons le système $\mathcal{S}$ divisé comme suit:



Le **principe des actions réciproques** donne:

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{R}_{\mathcal{S}_2\to\mathcal{S}_1}} = -\overrightarrow{\mathcal{R}_{\mathcal{S}_1\to\mathcal{S}_2}}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}_{O\mathcal{S}_2\to\mathcal{S}_1}} = -\overrightarrow{\mathcal{M}_{O\mathcal{S}_1\to\mathcal{S}_2}}}$$

Dans le cas de deux particules ponctuelles, on a $\overrightarrow{F_{M_1\to M_2}} \parallel \overrightarrow{M_1M_2}$: il est impossible que ces deux vecteurs ne soient pas colinéaires, ceci se justifiant grâce au moment -d'où **l'importance de ne pas se cantonner à l'aspect résultante**!

2) Des théorèmes fondamentaux

a) Théorème de la résultante cinétique/dynamique

Du PFD, on déduit:

$$\boxed{\underbrace{\underbrace{\overrightarrow{\mathcal{R}_{\varepsilon\to\mathcal{S}}} = \overrightarrow{\mathcal{S}_{\mathcal{R}_G}(S)}}_{\textbf{TRD}} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{P_{\mathcal{R}_G}(S)}}{\mathrm{d}t} = m\overrightarrow{a_{\mathcal{R}_G}(G)}}_{\textbf{TRC}}}$$

b) Théorème du moment cinétique/dynamique

Du PFD, on déduit aussi que

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}_{O_{\varepsilon\to\mathcal{S}}}} = \overrightarrow{\mathcal{D}_{O_{\mathcal{R}_G}}(\mathcal{S})}}$$

Si O est un point fixe, $O = G$ ou $\overrightarrow{v(O)} \parallel \overrightarrow{v(G)}$ alors $\boxed{\mathcal{M}_{\mathcal{O}_{\varepsilon\to\mathcal{S}}} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_{O\mathcal{R}_G}(\mathcal{S})}}{\mathrm{d}t}}$ (c'est le théorème de sup).

c) Théorème scalaire du moment cinétique

On connaît l'expression du moment par rapport à un axe: $\mathcal{M}_\Delta = \overrightarrow{\mathcal{M}_{A\in\Delta}} \cdot \overrightarrow{e_\Delta}$; le théorème scalaire du moment cinétique est ainsi exprimé:

$$\boxed{\begin{cases} A \text{ fixe} \\ \text{ou} \\ A = G \\ \text{ou} \\ \overrightarrow{v(A)} \parallel \overrightarrow{v(G)} \end{cases} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathcal{L}_A}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\mathcal{M}_{A_{\varepsilon\to\mathcal{S}}}} \underset{\cdot\overrightarrow{e_\Delta}}{\Rightarrow} \frac{\mathrm{d}\mathcal{L}_\Delta}{\mathrm{d}t} = \mathcal{M}_{\Delta_{\varepsilon\to\mathcal{S}}}}$$

V Une méthode de résolution d'un problème

1) Étude cinématique

- Déterminer **précisément** le **système** étudié,
- Compter le nombre de **degrés de liberté** offerts au système (le nombre de grandeurs de position que l'on peut faire varier indépendamment),
- Trouver les **équations cinématiques** associées au mouvement du système: si celui-ci a p grandeurs de position et n degrés de liberté, alors il faudra trouver $p - n$ équations, soit une par grandeur liée,
- **Résoudre** les équations qui peuvent être résolues à ce stade de l'exercice,
- Passer à l'**étude dynamique**.

2) Étude dynamique

- Faire **l'inventaire des actions extérieures** sur le système,
- Préciser s'il y a des **frottements**, si l'on est dans un **référentiel galiléen**, dans le **référentiel barycentrique** du système...
- Trouver les éventuels **axes de rotation** ou, à défaut, décomposer le mouvement (penser à $\mathcal{R}^*$, utile dans ces cas-ci)
- **Lier** les équations dynamiques trouvées avec les théorèmes **fondamentaux**, et **résoudre** finalement les équations restantes.

Oui, on est arrivé au bout!