Quadriques

Sommaire

I Généralités . . . 1
II Ellipsoïde . . . 2
III Hyperboloïde à deux nappes . . . 3
IV Hyperboloïde à une nappe . . . 4
V Paraboloïde hyperbolique . . . 5
VI Paraboloïde elliptique . . . 7
VII Cônes . . . 8
VIII Cylindres . . . 8

I Généralités

Définition 1. *Quadrique.*

Si E est un $\mathbb{R}$ev de dimension 3, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, alors une quadrique est donnée par

$$\mathcal{Q} = \{X \in E / q(X) + l(X) = \text{cte}\}$$

où $l \in E^*$, $q \in \mathcal{Q}(E) \setminus \{0\}$ (forme quadratique non nulle).

Remarque 1. Dans tout repère, on peut développer cette équation:

$$ax^2 + 2bxy + ... + *z = *'$$

Proposition 1. Réduction.

Désormais, E est un EVE. Ainsi, il existe $\mathcal{B}$ bon de E orthogonale pour q (en vertu du théorème de réduction simultanée), i.e.

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(q) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

De manière analogue au cas des coniques, dans l'équation, on pourra faire disparaître les termes qui restent en x, y, z, par changement d'origine, quitte à utiliser la forme canonique $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \underbrace{\frac{\Delta}{4a}}_{\text{peu important, terme constant}}$.

Proposition 2. Sections planes.

Si $\mathcal{P}$ est un plan, $\mathcal{Q}$ une quadrique, que dire de $\mathcal{Q} \cap \mathcal{P}$?

Réponse. Par changement de repère, on peut se ramener à $\mathcal{P}: z = 0$. Il reste alors une équation de degré 2: $\mathcal{R}(x, y, z) = 0$; il s'agit alors d'une conique à dégénérescence près (il peut donc aussi s'agir d'une droite...).

Définition 2. *Centre.*

Le centre d'une conique est le point de $\mathcal{Q}$ (s'il existe) où toutes les dérivées partielles sont nulles. On montre aisément que celui-ci est unique.

II Ellipsoïde

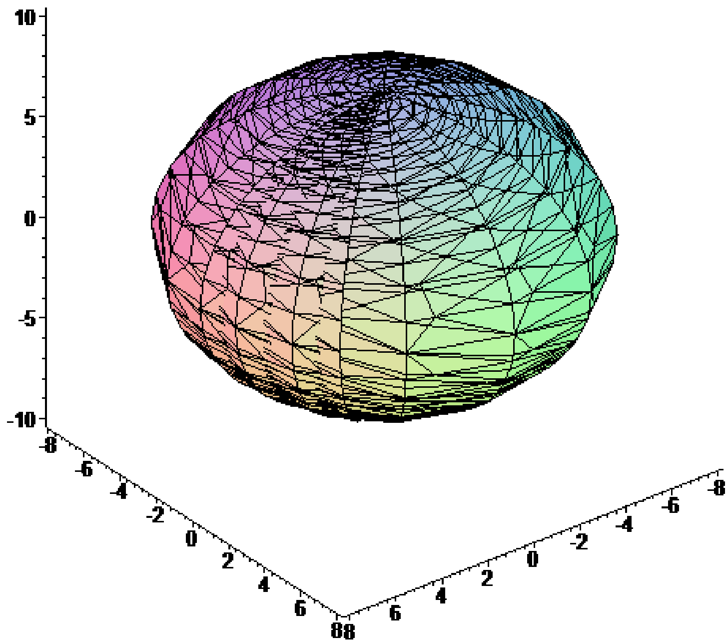

Figure 1.1: Un ellipsoïde tracé sous MAPLE, à l'aide de la commande: `implicitplot3d(x^2/2+y^2/3+z^2/4=30, x=-10..10, y=-10..10, z=-11..11, numpoints = 2000);`

Définition 3. *Une définition.*

Une ellipsoïde correspond au cas où q est définie positive ou définie négative. On se débarrasse alors des termes "rectangles" (en xy, xz, yz); il reste alors $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = m$. Trois cas sont possibles:

- $m = 1$: ce cas est soumis à étude ci-dessous,
- $m = -1$: alors $\mathcal{Q} = \varnothing$,
- $m = 0$: alors $\mathcal{Q} = \{\text{un point}\}$.

Proposition 3. Régularité de la quadrique.

Posons $f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$. *Alors* $\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{2x}{a^2} \\ \frac{2y}{b^2} \\ \frac{2z}{c^2} \end{pmatrix}$. *Sur la quadrique $\mathcal{Q}$, il nous vient que tous les points sont réguliers (i.e. que le gradient ne s'annule pas).*

Proposition 4. *Paramétrage.*

On notera le cas particulier où l'ellipsoïde est de révolution, si $a = b$. On a alors $\frac{r^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ *(en posant* $r^2 = x^2 + y^2$*).*

Dans le cas général, on peut poser le paramétrage en coordonnées sphériques qui suit:

$$\begin{cases} x = a\cos\theta\cos\varphi \\ y = b\cos\theta\sin\varphi \\ z = c\sin\theta \end{cases}$$

On peut remarquer, au passage, que $\mathcal{Q}$ est compact et connexe par arcs.

III Hyperboloïde à deux nappes

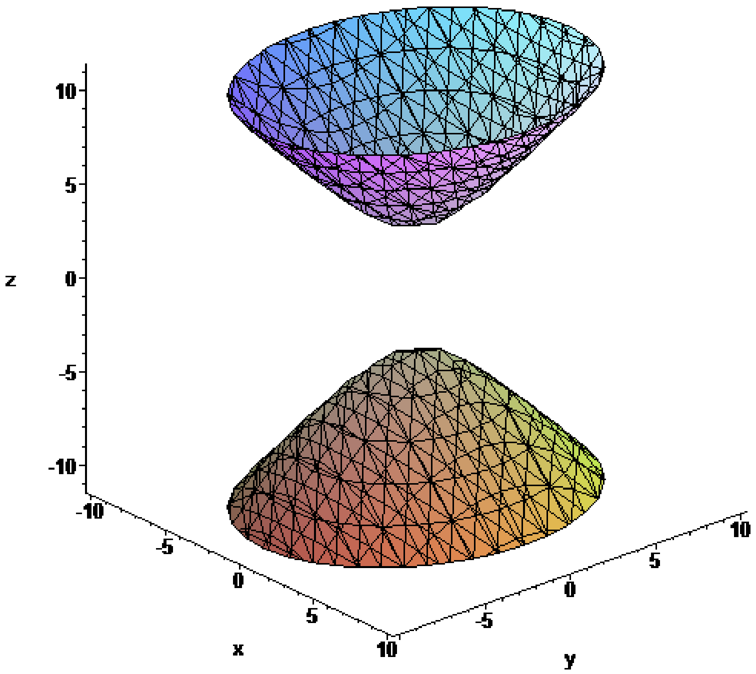

Figure 1.2: Un hyperboloïde à deux nappes tracé sous MAPLE, à l'aide de la commande: `implicitplot3d(x^2/2+y^2/3-z^2/4=-3, x=-10..10, y=-10..10, z=-11..11, numpoints = 2000);`

Définition 4. *Une définition.*

Il s'agit du cas où $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$.

Comme pour l'ellipsoïde, on remarque sans difficulté que tous les points de l'hyperboloïde sont réguliers; on peut donner, en chaque point, l'équation du plan tangent (normal au gradient): le gradient vaut $\nabla f\,(x,y,z) = \begin{pmatrix} \dfrac{2x}{a^2} \\ \dfrac{2y}{b^2} \\ -\dfrac{2z}{c^2} \end{pmatrix}$. En $M\,(x_0,y_0,z_0)$, le plan tangent a donc pour équation: $(\mathcal{T}) : \dfrac{xx_0}{a^2}+\dfrac{yy_0}{b^2}+\dfrac{zz_0}{c^2}=-1$.

Proposition 5. Paramétrage.

On peut donner, de la même façon que pour l'ellipsoïde, un paramétrage en coordonnées sphériques pour $\mathcal{Q}^+$:

$$\begin{cases} x = a\mathrm{sh}\ \theta\mathrm{ch}\ \varphi \\ y = b\mathrm{ch}\ \theta\mathrm{sh}\ \varphi \\ z = c\mathrm{ch}\ \theta \end{cases}$$

Pour $\mathcal{Q}^-$, il suffit de remplacer z par $-z$. On ne peut pas donner de paramétrage unifié pour la raison qui suit en exercice.

Exercice 1. $\mathcal{Q}$ n'est pas connexe par arcs.

Réponse. Si p_{Oz} désigne un projecteur sur l'axe Oz, alors $p_{Oz}(\mathcal{Q}) =]-\infty; -c] \cup [c; +\infty[$ qui n'est pas connexe par arcs, or p_{Oz} est $\mathcal{C}^0$.

Proposition 6. Sections planes.

Trois cas de sections planes se présentent:

- $\mathcal{Q} \cap (z = z_0)$: il s'agit d'une ellipse à dégénérescence près.
- $\mathcal{Q} \cap (y = y_0)$: il s'agit d'une hyperbole à dégénérescence près.
- Dans les autres cas, on a $\left(\frac{z}{c} - \frac{x}{a}\right)\left(\frac{z}{c} + \frac{x}{a}\right) = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 + \frac{y^2}{c^2}$. Il faut donc, pour que la section plane soit non vide, que le produit ne s'annule pas: dans ce cas, on obtient une parabole.

IV Hyperboloïde à une nappe

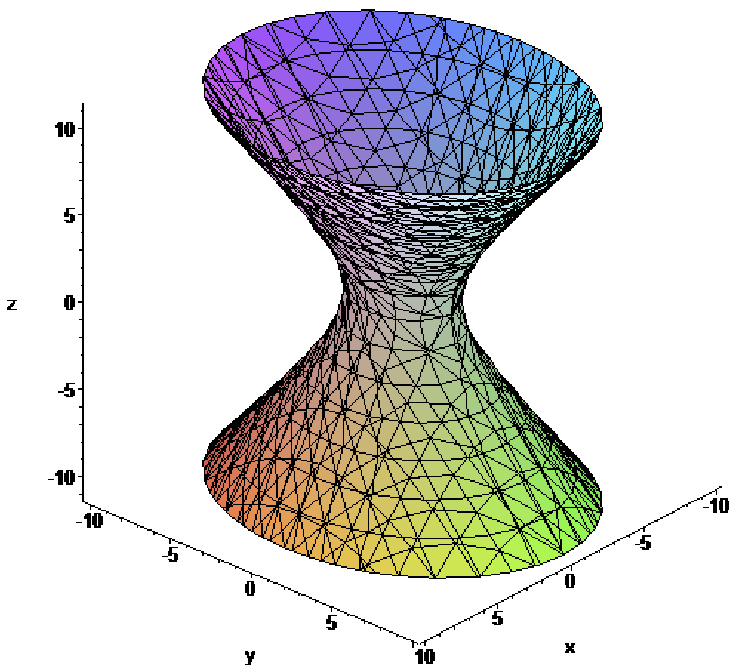

Figure 1.3: Un hyperboloïde à une nappe tracé sous Maple, à l'aide de la commande: `implicitplot3d(x^2/2+y^2/3-z^2/4=3, x=-10..10, y=-10..10, z=-11..11, numpoints = 2000);`

Définition 5. *Une définition.*

Il s'agit du cas où $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Tous ses points sont réguliers, et il possède les mêmes sections planes que son analogue à deux nappes à l'exception de la section vide.

Exercice 2. *Génératrices.*

$\mathcal{Q}$ est engendré par une union infinie de droites.

Réponse. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, donc $\frac{x^2}{a^2}-1=\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}\Rightarrow\left(\frac{x}{a}-1\right)\left(\frac{x}{a}+1\right)=\left(\frac{z}{c}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{z}{c}+\frac{y}{b}\right)$.

En définissant $\mathcal{D}_\lambda$: $\begin{cases}\frac{x}{a}-1=\lambda\left(\frac{z}{c}-\frac{y}{b}\right)\\ \lambda\left(\frac{x}{a}-1\right)=\frac{z}{c}+\frac{y}{b}\end{cases}$, on vérifie que $\mathcal{D}_\lambda$ est bien une droite: $\begin{vmatrix}\frac{1}{a} & \frac{-\lambda}{a}\\ \frac{\lambda}{b} & \frac{1}{b}\\ \frac{-\lambda}{c} & \frac{1}{c}\end{vmatrix}$ possède un déterminant extrait non nul $\left(\frac{1+\lambda^2}{ab}>0\right)$, ainsi les deux plans définis ne sont pas disjoints ni confondus. $\mathcal{D}_\lambda$ est donc bien une droite, et

$$\mathcal{Q}=\bigcup_{\lambda\in\mathbb{R}}\mathcal{D}_\lambda$$

Remarque 2. Par un point d'une quadrique qui n'est pas un plan, passent au plus deux droites génératrices. En effet, l'intersection du plan tangent à $\mathcal{Q}$ en M_0 avec $\mathcal{Q}$, est une conique, qui est au plus l'union de deux droites.

V Paraboloïde hyperbolique

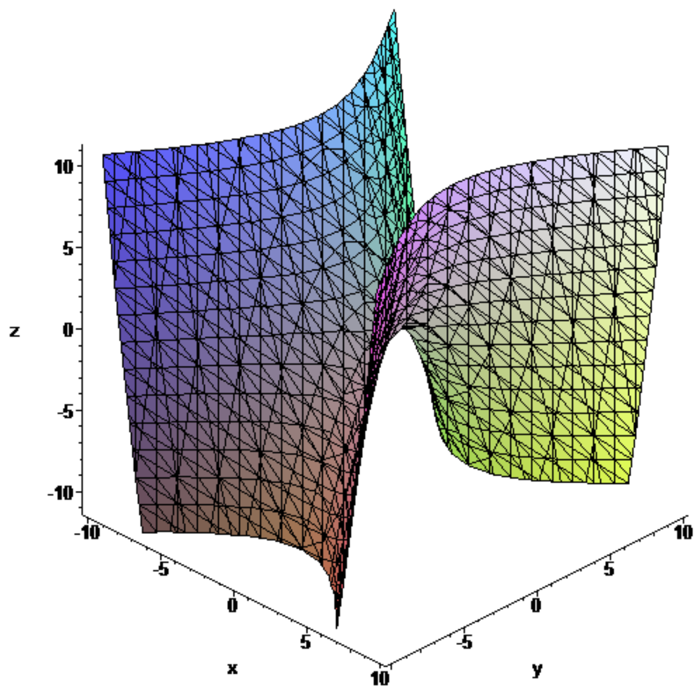

Figure 1.4: Un paraboloïde hyperbolique tracé sous MAPLE, à l'aide de la commande: `implicitplot3d(x^2/2+y^2/3=z, x=-10..10, y=-10..10, z=-11..11, numpoints = 2000);`

Définition 6. *Une définition.*

Il s'agit du cas où $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$ (la matrice de la forme quadratique dans une certaine base a une valeur propre nulle, et les deux autres sont de signes opposés).

Le paraboloïde hyperbolique ainsi défini, est dit équilatère si $a=b$. On peut proposer une autre équation: $\frac{x^2-y^2}{a^2}=z\Rightarrow(x+y)(x-y)=za^2\Rightarrow x'y'=kz$ où $\begin{cases}x'=\frac{x+y}{\sqrt{2}}\\ y'=\frac{x-y}{\sqrt{2}}\end{cases}$ (rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$).

Remarque 3. Petite remarque au passage: une forme quadratique n'a pas de valeurs propres! En effet, le changement de base sur les formes quadratiques se fait avec la formule $M={}^tPVP$, où $P\in\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas forcément orthogonale!

Proposition 7. Génératrices.

De la même façon que chez l'hyperboloïde à une nappe, on propose les génératrices qui suivent:

$$\mathcal{D}_\lambda : \begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = \lambda \\ \lambda\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right) = z \end{cases}$$

On vérifie sans difficulté qu'il s'agit bein d'une droite: le détermiant extrait $-\dfrac{1}{b}$ *du déterminant du système, est non nul. Alors* $\mathcal{Q} = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} \mathcal{D}_\lambda$.

Exercice 3. Étant données deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, quels sont les points de l'espace qui en sont équidistants?

Réponse. Il faut envisager deux cas:

- si $\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}'$: alors on se ramène à $\mathcal{D} : \begin{cases} y = a \\ z = 0 \end{cases}$, $\mathcal{D}' : \begin{cases} y = -a \\ z = 0 \end{cases}$. Ainsi, $\mathrm{d}\left(M, \mathcal{D}\right)^2 = \left(y-a\right)^2 + z^2$, et $\mathrm{d}\left(M, \mathcal{D}'\right)^2 = \left(y+a\right)^2 + z^2$. Les points équidistants de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont alors les points tels que $\left(y-a\right)^2 = \left(y+a\right)^2$ soit $y = 0$.

- sinon, $\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}'$: alors, soient $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ deux plans parallèles contenant respectivement $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Si l'on appelle $\theta \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ l'angle obtenu entre $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$en projetant orthogonalement $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{P}'$, alors on se ramène à $\mathcal{D} : \begin{cases} z = a \\ -x\sin\theta + y\cos\theta = 0 \end{cases}$. Alors $\mathrm{d}^2\left(M, \mathcal{D}\right)^2 = \left(z-a\right)^2 + \mathrm{d}^2\left(m, \mathcal{D}\right)$ où m représente le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$, soit $\mathrm{d}^2\left(M, \mathcal{D}\right)^2 = \left(z-a\right)^2 + \left(-x\sin\theta + y\cos\theta\right)^2$.
  L'équation vérifiée par M est alors $2az + xy\sin 2\theta = 0$, ce qui représente un paraboloïde hyperbolique si $a \neq 0$, les deux plans bissecteurs des droites sinon.

VI Paraboloïde elliptique

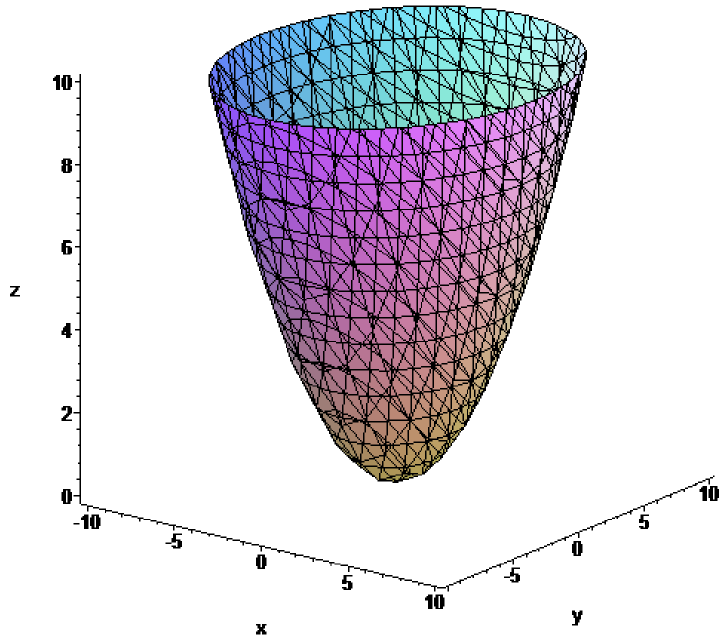

Figure 1.5: Un paraboloïde elliptique tracé sous Maple, à l'aide de la commande: `implicitplot3d(x^2/2+y^2/3=3.2*z, x=-10..10, y=-10..10, z=-0..10, numpoints = 2000);`

Définition 7. *Une définition.*

Il s'agit du cas où $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z$ (i.e. la matrice de l'application bilinéaire correspondant à la forme quadratique q a deux valeurs propres de même signe, la troisième étant nulle).

Il est de révolution si $a=b$; on propose alors une définition en coordonnées cylindriques: $\dfrac{r^2}{a^2}=z$.

VII Cônes

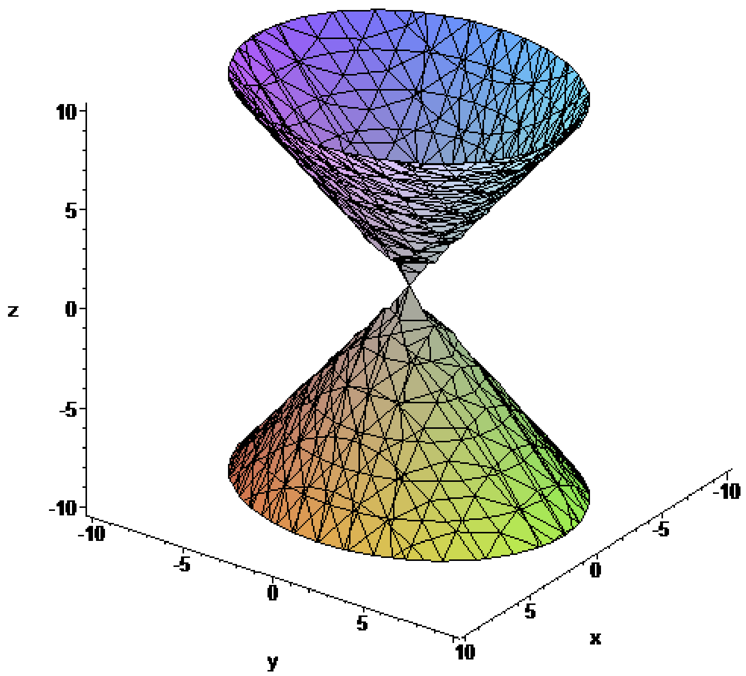

Figure 1.6: Un cône tracé sous MAPLE, à l'aide de la commande: `implicitplot3d(x^2/2+y^2/3-z^2/4=0, x=-10..10, y=-10..10, z=-10..10, numpoints = 2000);`

Définition 8. *Une définition.*

Il s'agit du cas où la forme quadratique est nulle: ne reste alors que $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$.

Le cône ainsi défini est de révolution si $a=b$; alors on propose une autre définition en coordonnées cylindriques: $\dfrac{r^2}{a^2}=\dfrac{z^2}{c^2}$.

On remarquera assez aisément que le cône est un cas hybride entre un hyperboloïde à une et deux nappes: tous ses points sont réguliers, à l'exception de O où le gradient s'annule.

Pour tout point $M \in \mathcal{Q}$ hors l'origine, on donne une équation du plan tangent: $\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}-\dfrac{z_0z}{c^2}=0$. On remarque que celui-ci passe toujours par O...

VIII Cylindres

Définition 9. *Surface cylindrique.*

Une surface cylindrique est une union de droites parallèles: si $(\mathcal{D}_i)_{i\in I}$ est une famille de droites parallèles, alors une surface cylindrique à partir de $(\mathcal{D}_i)_{i\in I}$ peut être définie par $\mathcal{S}=\bigcup\limits_{i\in I}\mathcal{D}_i$.

Proposition 8. *Types de cylindres.*

Trois types de cylindres existent:

- le cylindre elliptique: il s'agit d'un cylindre d'équation $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

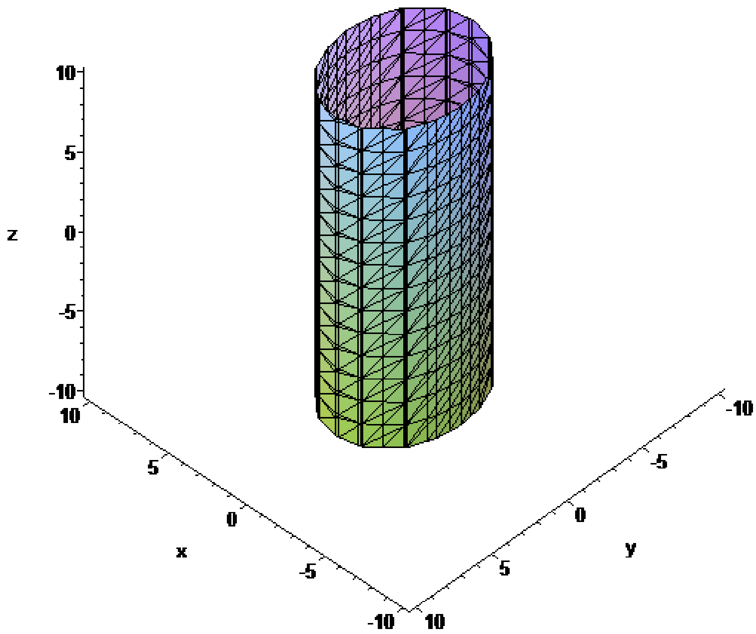

Figure 1.7: Un cylindre elliptique tracé sous Maple, à l'aide de la commande: `implicitplot3d(x^2/2+y^2/3=7, x=-10..10, y=-10..10, z=-10..10, numpoints = 2000);`

- le cylindre parabolique: il s'agit d'un cylindre d'équation $\frac{x^2}{a^2} = z$.

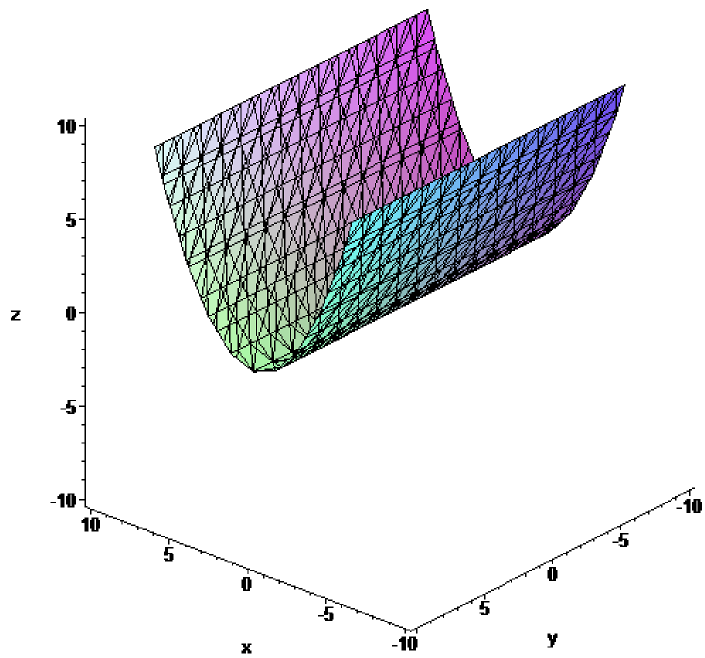

Figure 1.8: Un cylindre parabolique tracé sous Maple, à l'aide de la commande: `implicitplot3d(x^2/4=z, x=-10..10, y=-10..10, z=-10..10, numpoints = 2000);`

- le cylindre hyperbolique: il s'agit d'un cylindre d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

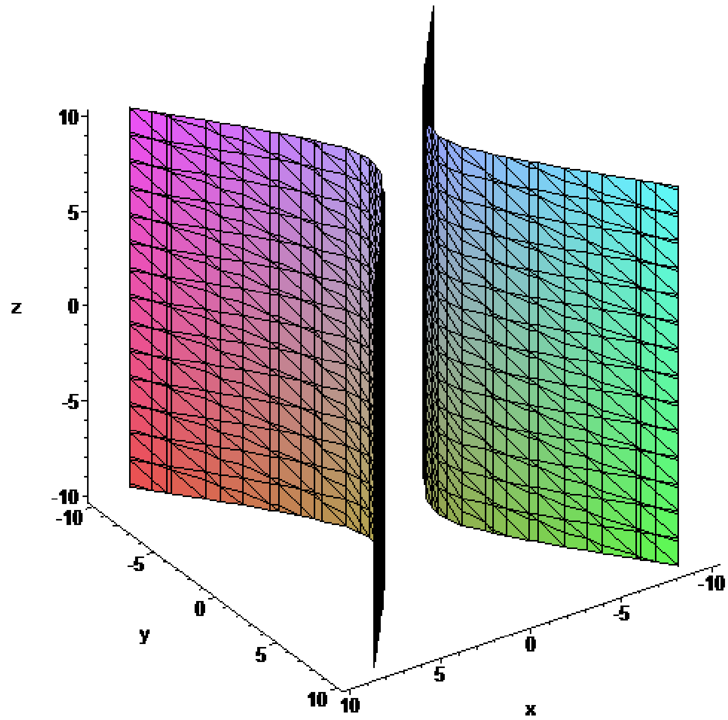

Figure 1.9: Un cylindre hyperbolique tracé sous MAPLE, à l'aide de la commande: `implicitplot3d(x^2/2-y^2/3=2, x=-10..10, y=-10..10, z=-10..10, numpoints = 2000);`

On remarquera qu'il n'y a rien de particulièrement intéressant à étudier sur les cylindres, puisqu'une étude d'une section plane (conique usuelle) permet de connaître, par translation le long d'une droite, l'intégralité des propriétés du cylindre.